Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

$\alpha^0 = 1$

$$(-1)^\nu = \begin{cases} 1, & \nu = \alpha\rho\tau\iota o\varsigma \\ -1, & \nu = \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau o\varsigma \end{cases}$$

$\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$

$$a^0 = 1$$

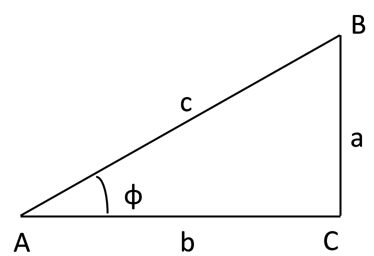
$$a^\nu a^\mu = a^{\nu+\mu}$$

$$\frac{a^\nu}{a^\mu} = a^{\nu-\mu}$$

$$(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu\mu}$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

$(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu \cdot \mu}$

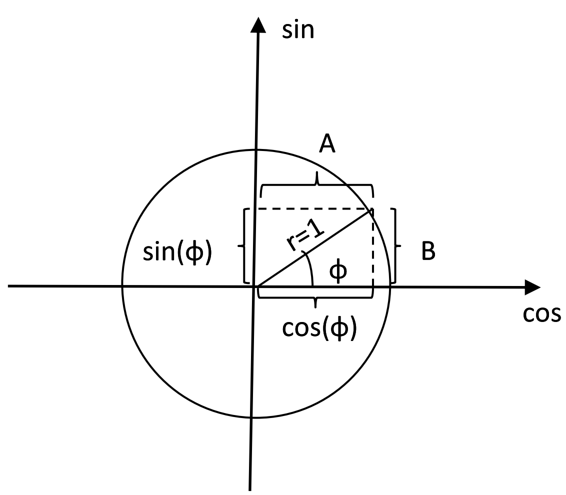


$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{c}$$

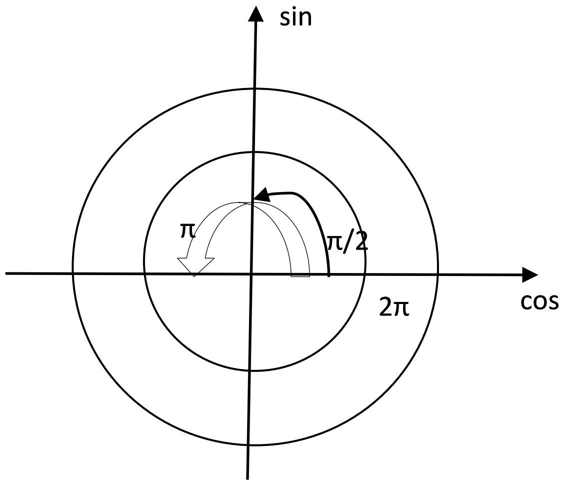
$$\cos(\varphi) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{a}{b} = \frac{sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$



$$\cos(\varphi) = \frac{A}{1} = A$$

$$\sin(\varphi) = \frac{B}{r} = \frac{B}{1} = B$$

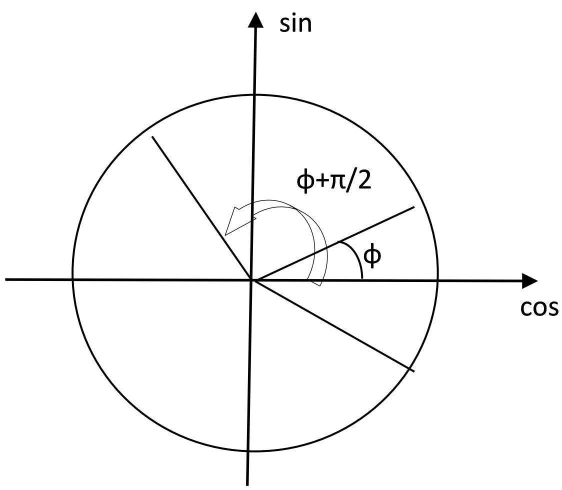


$$\cos(0^0) = 1 \Rightarrow \cos(2\pi)$$
$$\sin(0^0) = 0 \Rightarrow \sin(2\pi)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\cos(\pi) = -1$$
$$\sin(\pi) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$



$$\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$$
$$\sin(\varphi + \pi) = -\sin(\varphi)$$

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\varphi)$$
$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\varphi)$$

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$
$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$$

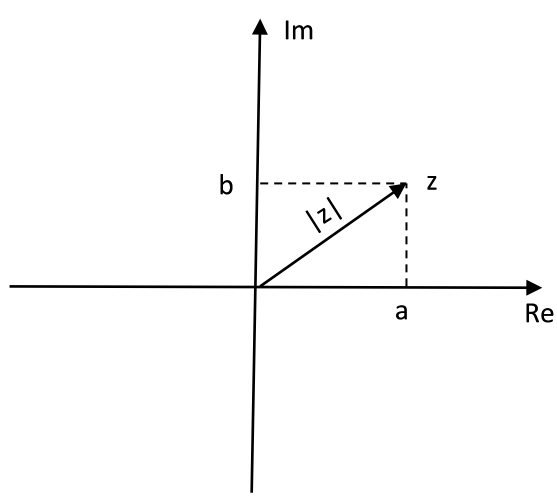
z = a + jb

Re{z} Im{z}

Re{z} = a

Im{z} = b

Euler



$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$|\mathrm{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|\mathrm{z}|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |\mathrm{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = |\mathrm{z}|\, e^{j\varphi}$$

$$z = |\mathrm{z}|\, e^{j\varphi} = |\mathrm{z}|(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = |\mathrm{z}|\cos(\varphi) + \mathrm{j}|\mathrm{z}|\sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$\mathrm{z} = |\mathrm{z}|\frac{a}{|z|} + j|\mathrm{z}|\frac{b}{|z|} = a + jb$$

$$z_1 = a_1 + jb_1$$

$$z_2 = a_2 + jb_2$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

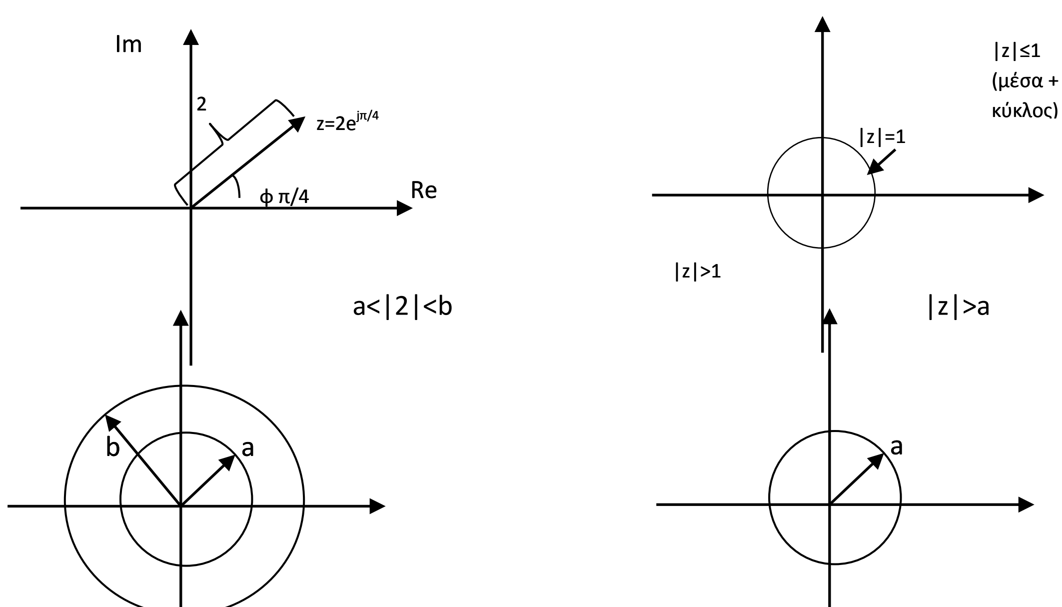
$$z_1 - z_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$$

$$z_1 = |z_1|\, e^{j\varphi_1}$$

$$z_2 = |z_2|\, e^{j\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

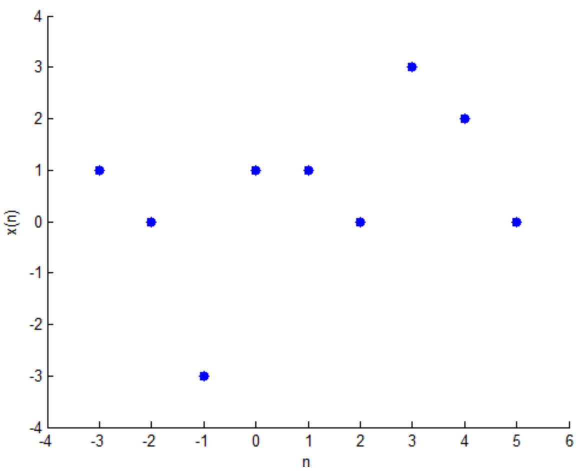
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|\, e^{j\varphi_1}}{|z_2|\, e^{j\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



$$\sum_{i=1}^{5} a_i = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) = \sum_{i=1}^{2} a_i + \sum_{i=3}^{5} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$



Μοναδική Διακριτή ώση

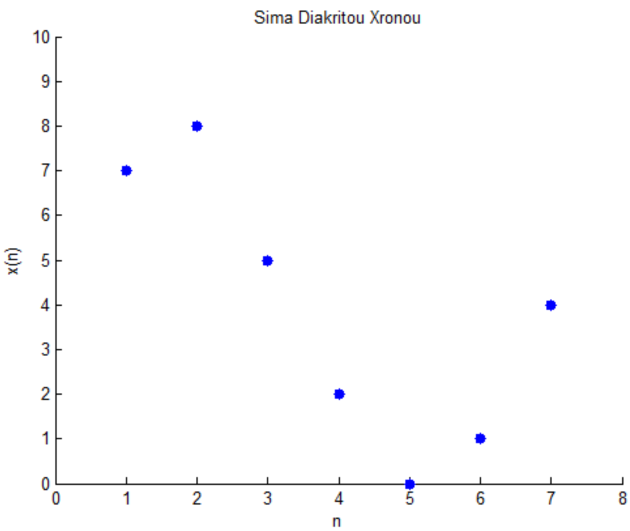
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

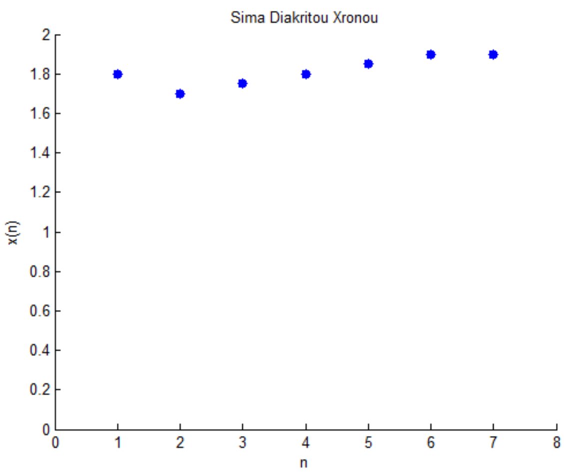
Βηματική συνάρτηση

2^o ΜΑΘΗΜΑ

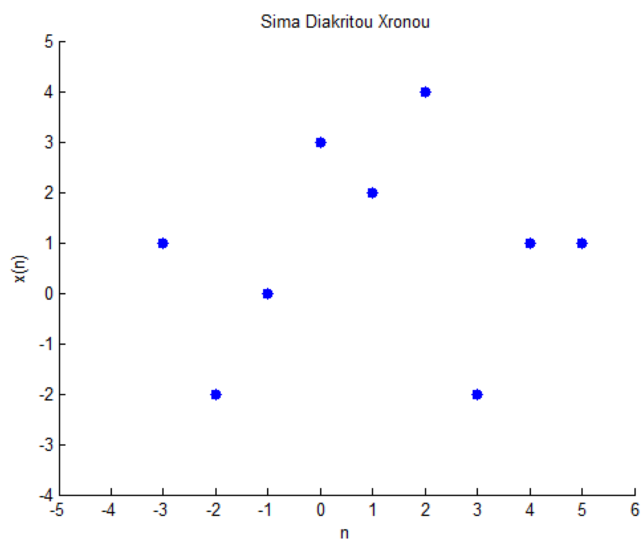
n ΕΒΔΟΜΑΔΑ	x(n) #ΦΟΙΤΗΤΩΝ
1	7
2	8
3	5
4	2
5	0
6	1
7	4



n	x(n)
1	1,8
2	1,7
3	1,75
4	1,8
5	1,85
6	1,9
7	1,90



Όταν το n είναι ακέραιος μιλάμε πάντα για διακριτό χρόνο.

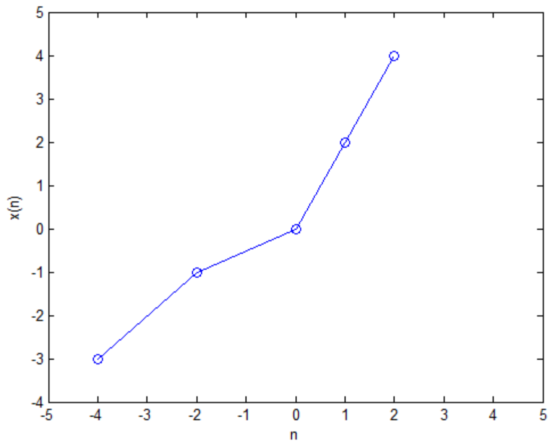


$x(n)|_{n=-5}=0$

$x(n)|_{n=4}=1$

$x(n)|_{n=500}=0$

$x(n) = 2n$



x(200)=2*200=400

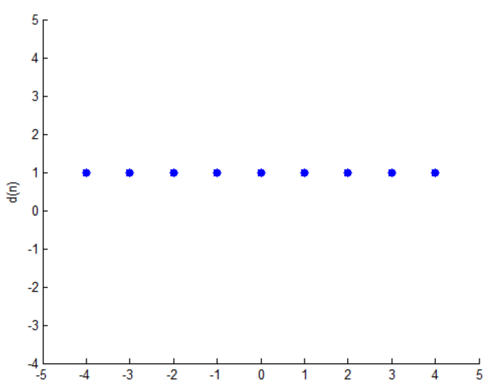
x(2,5)=ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ!

Το x(n) παίρνει οποιαδήποτε τιμή, ενώ το n είναι μόνο ακέραιος αριθμός.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$

ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΩΣΗ

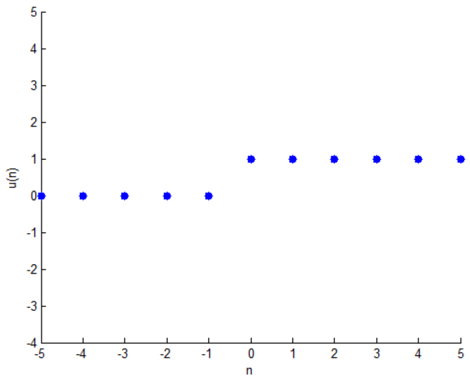
(πεπερασμένου μήκους)



$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

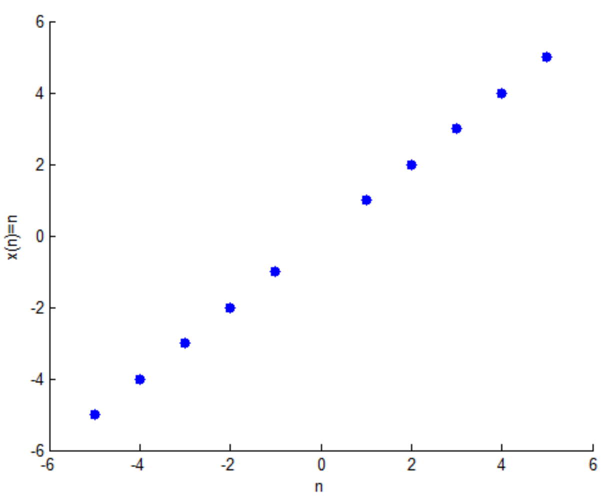
(άπειρου μήκους)



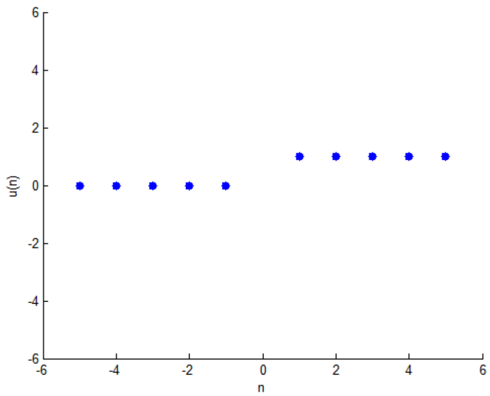
Σήμα Πεπερασμένου Μήκους

ΣΕΛΙΔΑ 6 – ΣΧΗΜΑ ΚΑΤΩ-ΚΑΤΩ

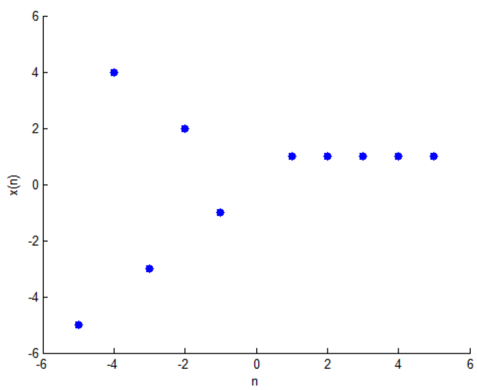
Σήμα Άπειρου Μήκους



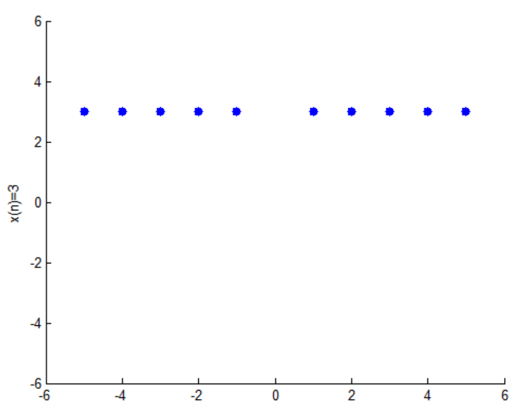
Δεξιάς πλευράς



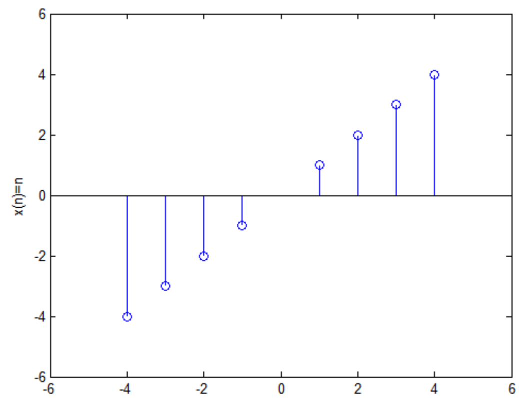
Αριστερής πλευράς



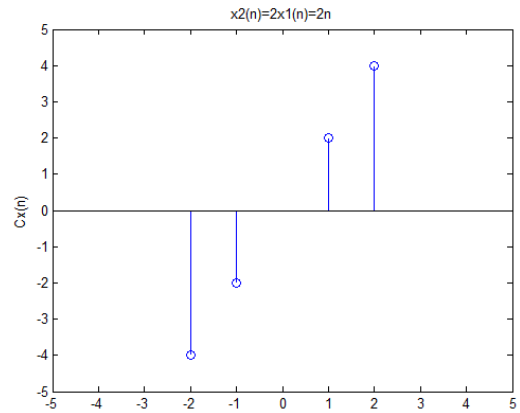
Αμφίπλευρης

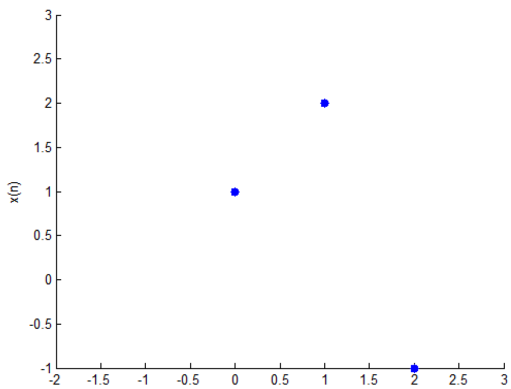


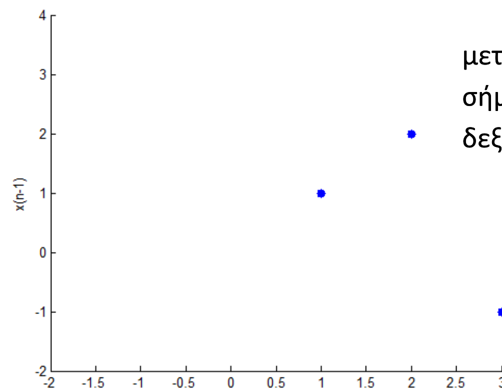
$x_1(n)=n$



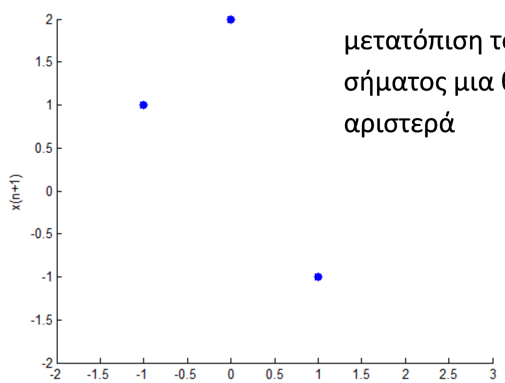
$x_2(n)=2x_1(n)=2n$ κλιμάκωση κατά πλάτος



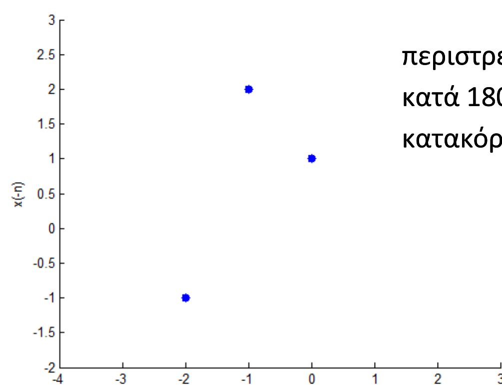




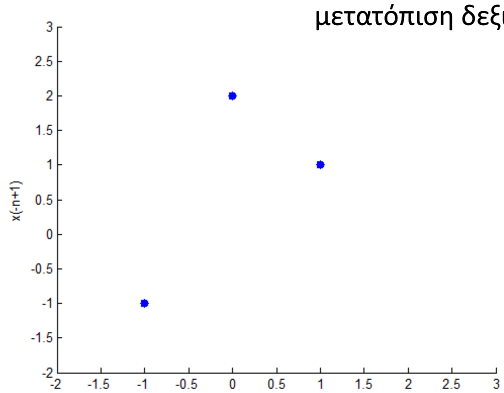
μετατόπιση του σήματος μια θέση δεξιά



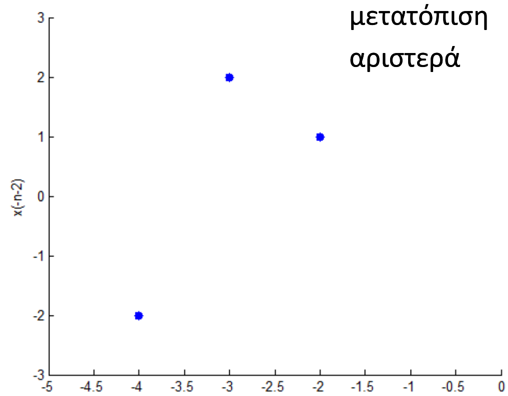
μετατόπιση του σήματος μια θέση αριστερά

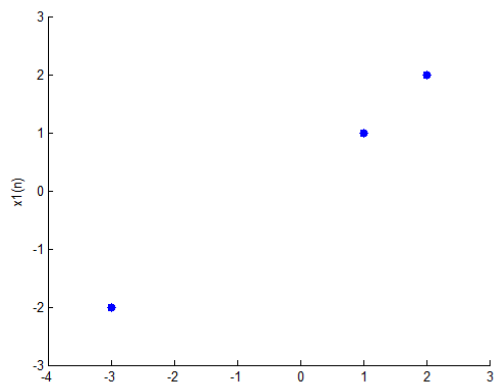


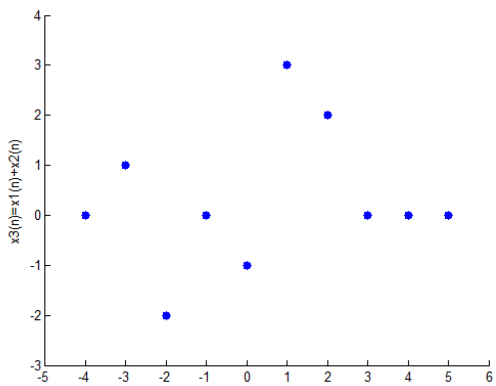
περιστρέφεται κατά 180° στον κατακόρυφο άξονα μετατόπιση δεξιά

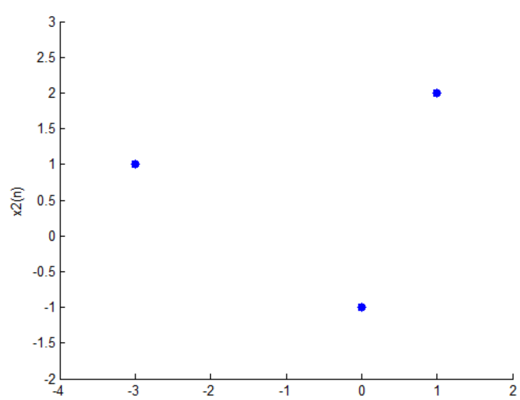


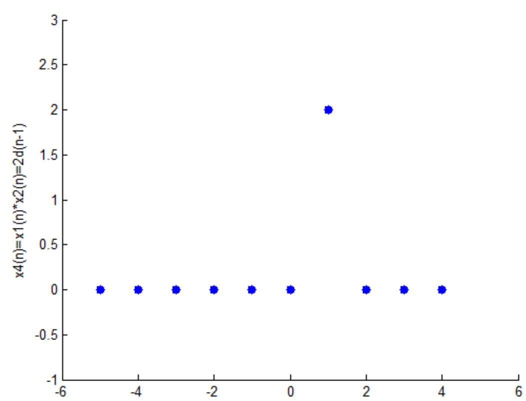
μετατόπιση αριστερά







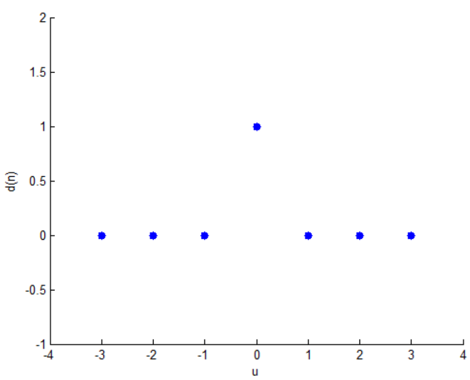


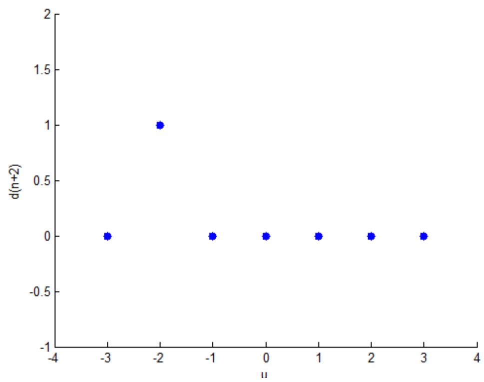


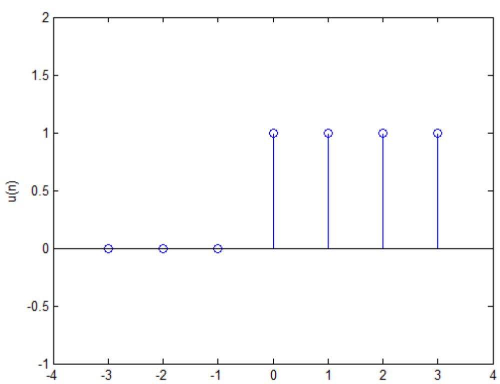
3ο ΜΑΘΗΜΑ

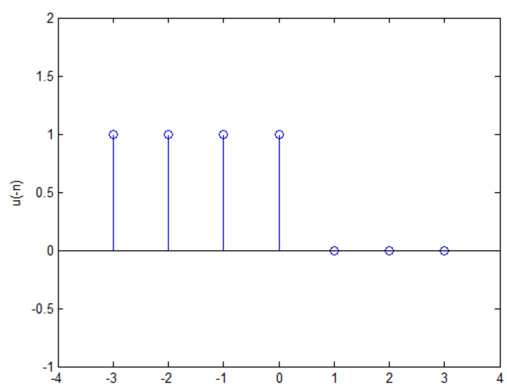
ΠΡΟΣΟΧΗ! Όταν έχουμε αντιστρέψει τη συνάρτηση, δηλ. u(-n), τότε η μετατόπιση πάει με αντίθετη φορά.

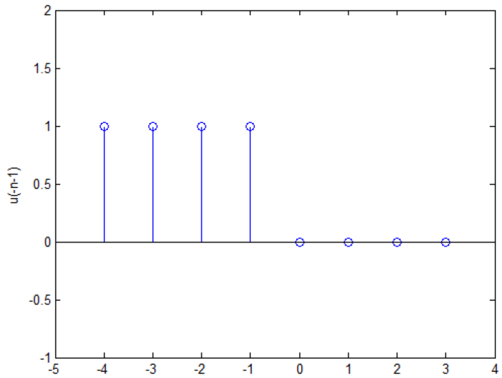
$$x_1(n) = 2u(-n-1)$$
$$x_2(n) = 3\delta(n+2)$$
$$x_3(n) = u(n) + u(-n)$$
$$x_4(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

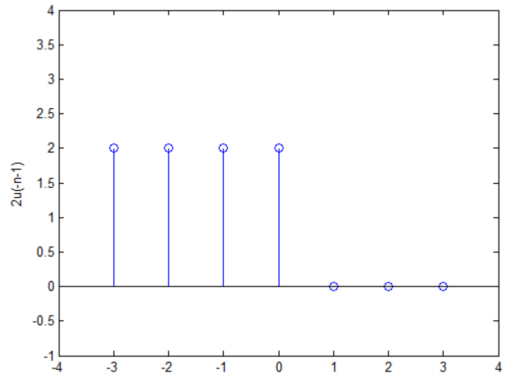


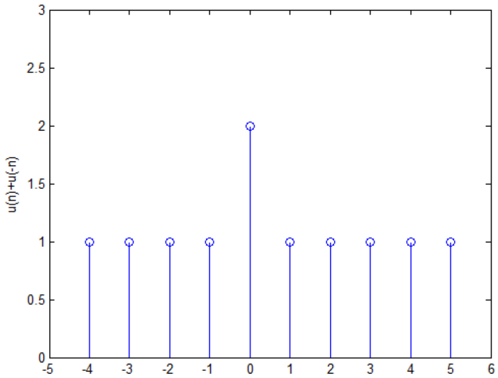








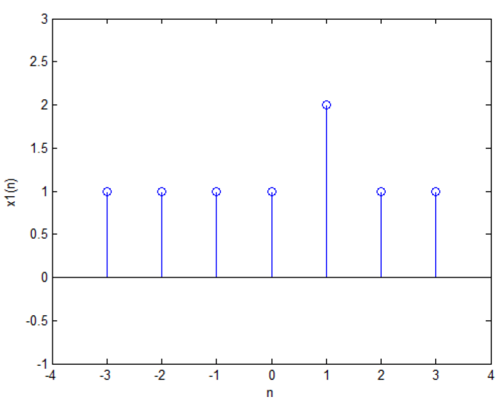




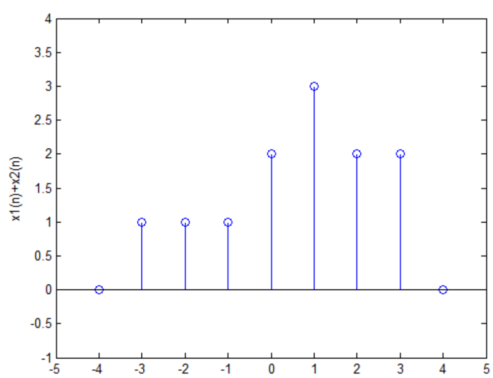
$$\forall n \; n=-1 \rightarrow x_3(-1)=x_1(-1)+x_2(-1)$$
$$n=0 \rightarrow x_3(0)=x_1(0)+x_2(0)$$
$$n=1 \rightarrow x_3(1)=x_1(1)+x_2(1)$$

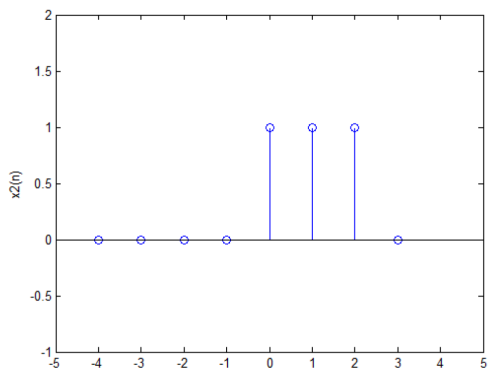
ισχύει και για αφαίρεση και για πολλαπλασιασμό

π.χ.

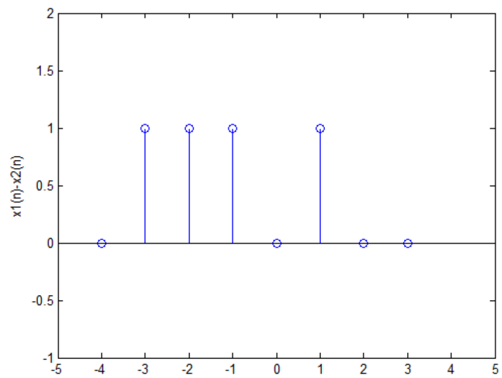


$x_1(n)$
+
$x_2(n)$

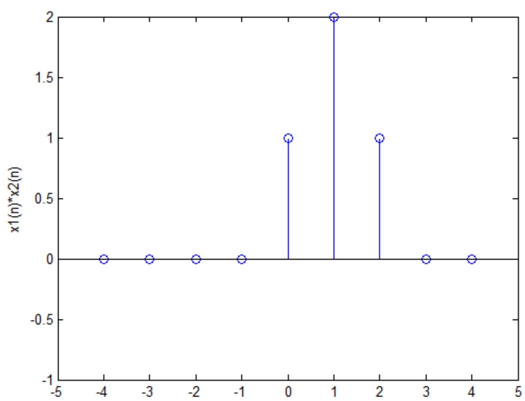


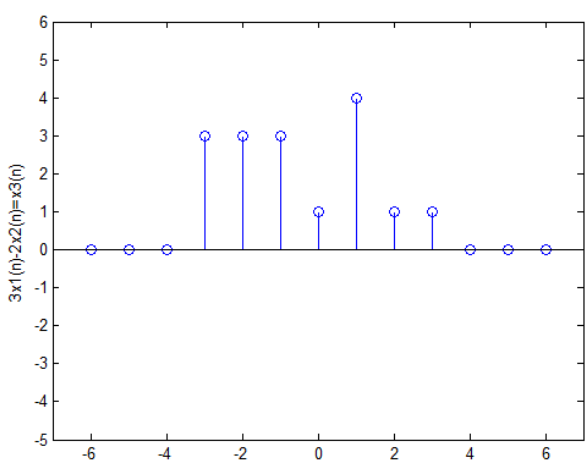


$x_1(n)$
-
$x_2(n)$



$x_1(n)$
*
$x_2(n)$

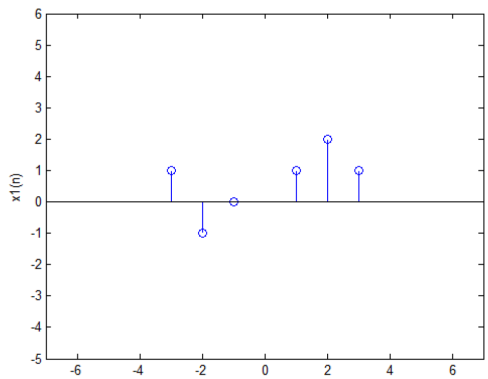


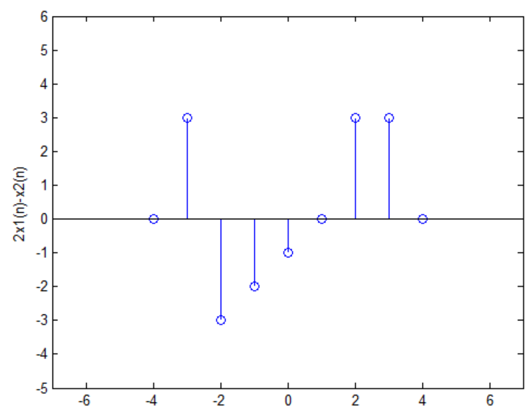


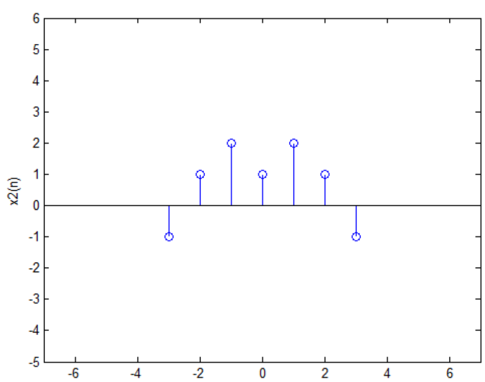
γραμμική σχέση (πρόσθεση αφαίρεση σημάτων)

n	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$3x_1(n)-2x_2(n)$
-3	1	0	3·1-0=3
-2	1	0	3·1-0=3
-1	1	0	3·1-0=3
0	1	1	3·1-2·1=1
1	2	1	3·2-2·1=4
2	1	1	3·1-2·1=1
3	1	1	3·1-2·1=1
4	0	0	3·0-2·0=0

π.χ.

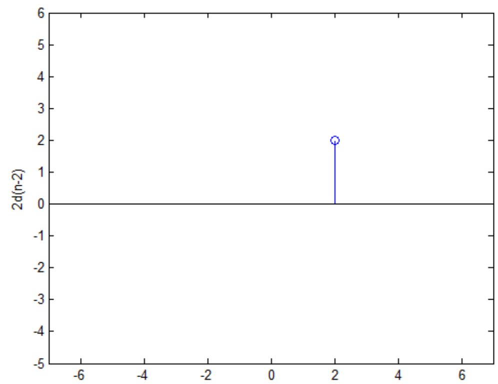


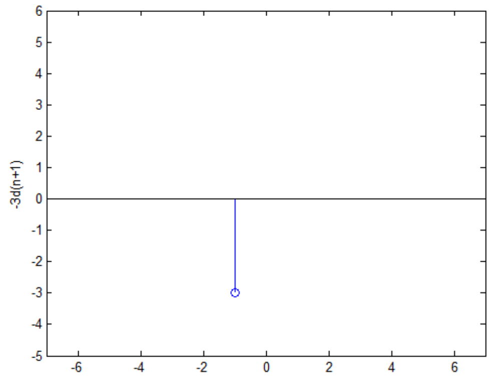


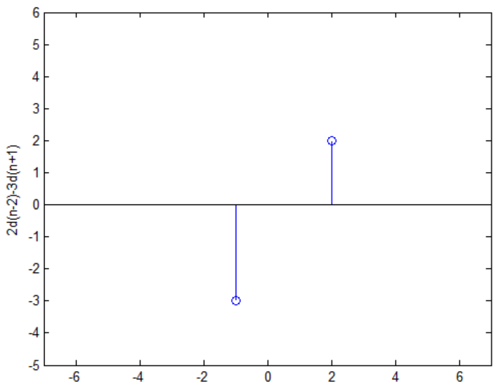


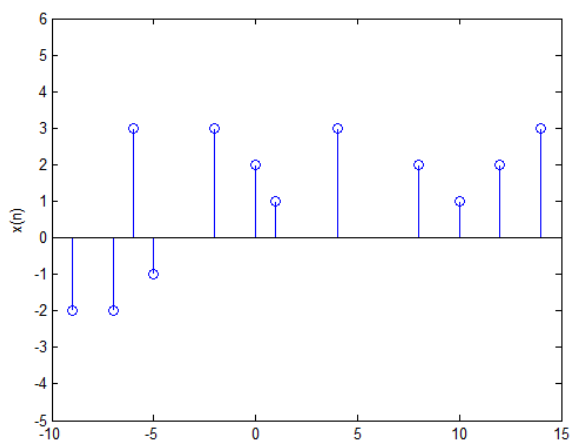
n	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$2x_1(n)-x_2(n)$
-3	1	-1	2·1-(-1)=3
-2	-1	1	2·(-1)-1=-3
-1	0	2	2·0-2=-2
0	0	1	2·0-1=-1
1	1	2	2·1-2=0
2	2	1	2·2-1=3
3	1	-1	2·1-(-1)=3

π.χ.









$$x(n) = -2\delta(n+9) - 2\delta(n+7) + 3\delta(n+6) - \delta(n+5) + 3\delta(n+2) + 2\delta(n) + \delta(n-1) +$$
$$3\delta(n+4) + 2\delta(n-8) + 2\delta(n-12) + \delta(n-10) + 3\delta(n-14)$$

μετατόπιση

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \delta(n-1)$$

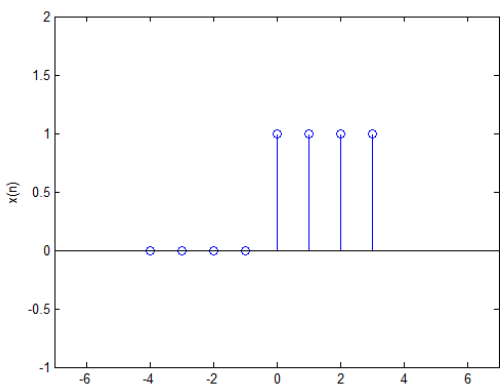
κλιμάκωση
στο πλάτος

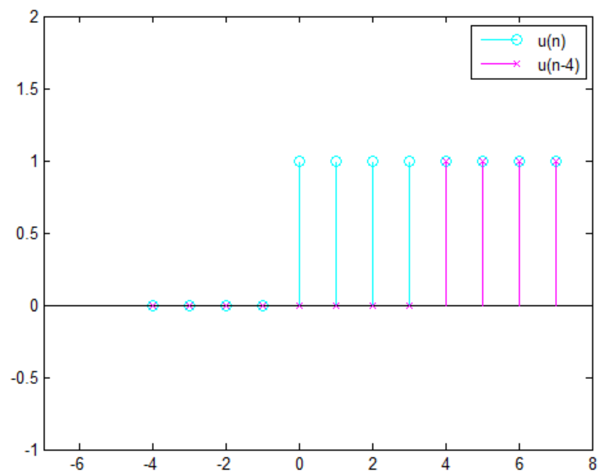
Στο προηγούμενη σχήμα →

α-3=0
α-2=3
α-1=0
α_0=2
α_1=1
α_2=0
α_3=0
α_4=3
α_5=0

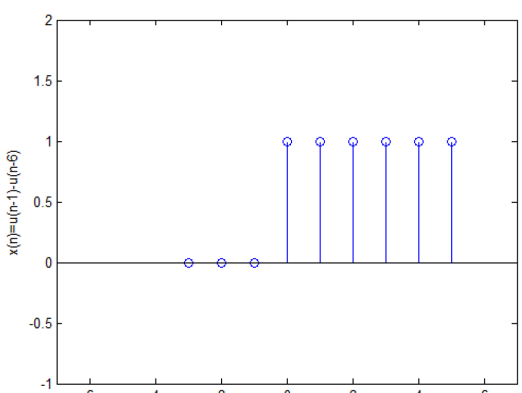
π.χ.

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$$
$$x(n) = u(n) - u(n-4)$$

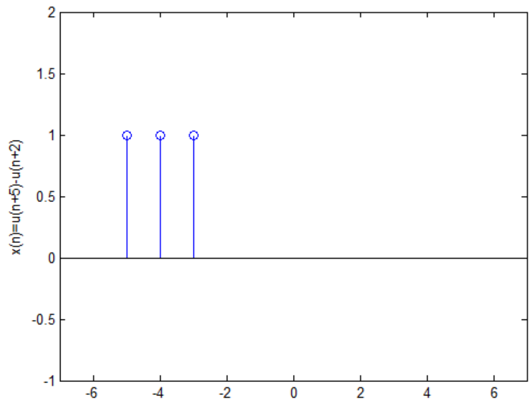




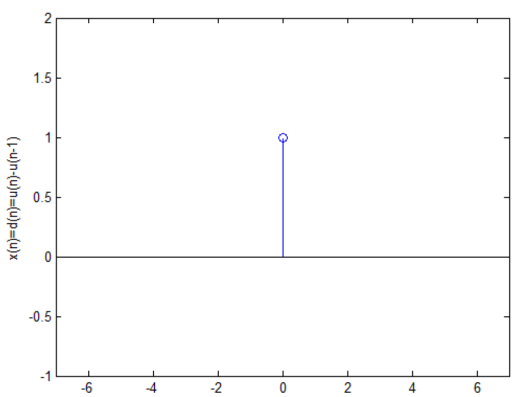
π.χ.

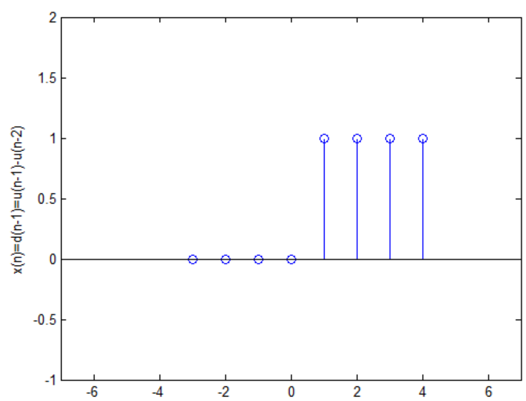


π.χ.



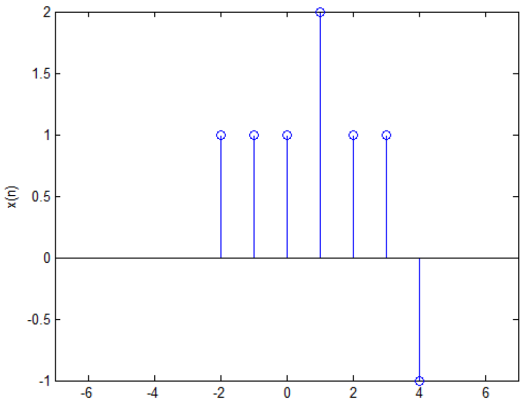
π.χ.





Άρα → $\forall n \;\; \delta(n-n_0)=u(n-n_0)-u(n-(n_0+1))$

π.χ.



$$x(n)=\delta(n+2)+\delta(n+1)+\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)-\delta(n-4) \quad (1)$$

$$\delta(n+2)=u(n+2)-u(n+1)$$
$$\delta(n+1)=u(n+1)-u(n)$$
$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$
$$\delta(n-1)=u(n-1)-u(n-2)$$
$$\delta(n-2)=u(n-2)-u(n-3)$$
$$\delta(n-3)=u(n-3)-u(n-4)$$
$$\delta(n-4)=u(n-4)-u(n-5)$$

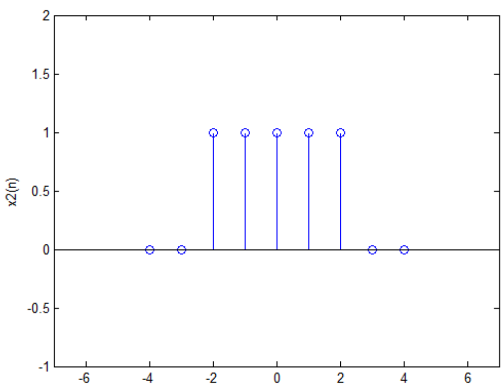
$$(1)\rightarrow \mathrm{x(n)}=[u(n+2)-u(n+1)]+[u(n+1)-u(n)]+[u(n)-u(n-1)]+2[u(n-1)-u(n-2)]+$$
$$[u(n-2)-u(n-3)]+[u(n-3)-u(n-4)]-[u(n-4)-u(n-5)]\Rightarrow$$

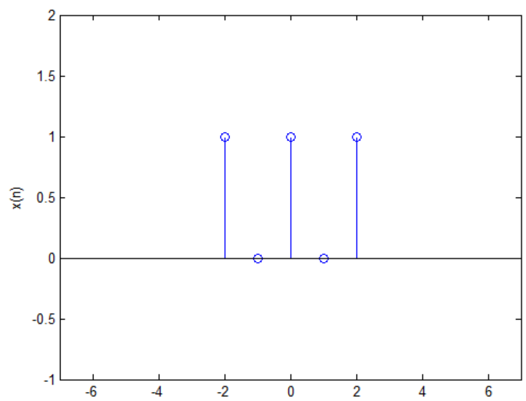
$$\mathrm{x(n)=u(n+2)-u(n-1)+2\,u(n-1)-2\,u(n-2)+u(n-2)-u(n-4)-u(n-4)+u(n-5)}\Rightarrow$$

$$\mathrm{x(n)=u(n+2)+u(n-1)-u(n-2)-2\,u(n-4)}+u(n-5)$$

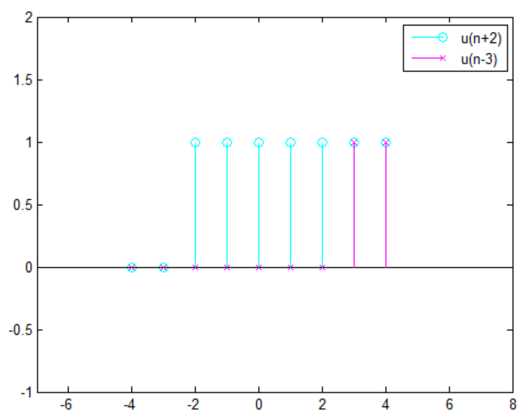
4^{o} ΜΑΘΗΜΑ

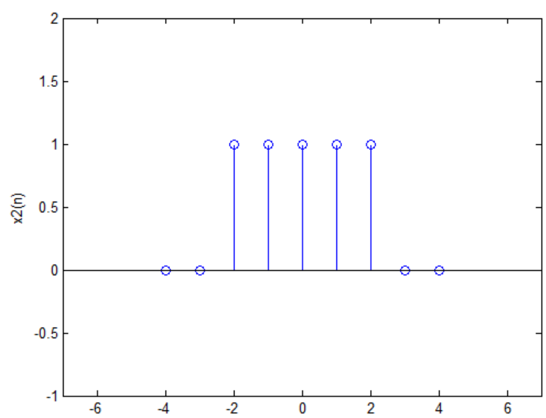
$$x(n)=\underbrace{(-1)^n}_{x_1(n)}\underbrace{[u(n+2)-u(n-3)]}_{x_2(n)}$$

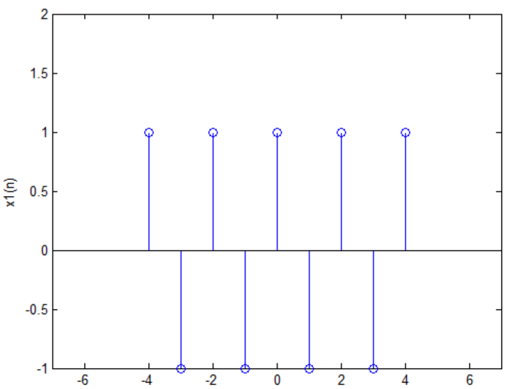


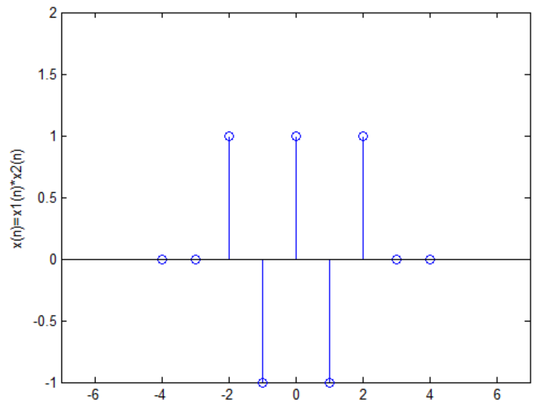


$$x_1(n)=(-1)^n$$
$$x_1(n)=u(n+2)-u(n-3)$$
$$x(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$$

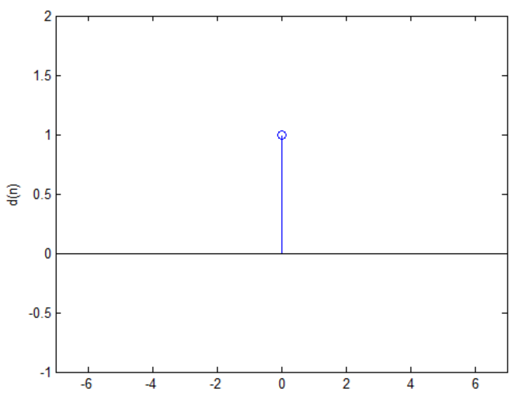


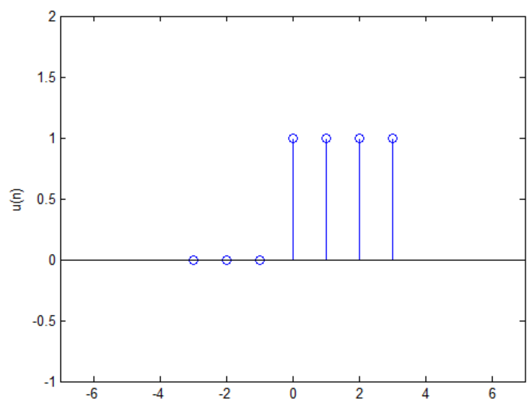






Μοναδιαία συνάρτηση βήματος ως προς συνάρτηση δέλτα





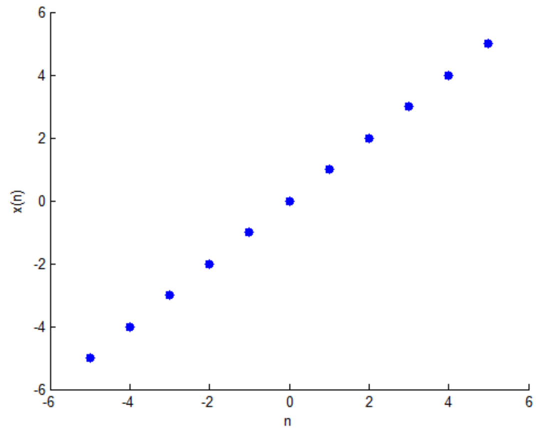
Περιοδικά Σήματα

$N: \; x(n) = x(n \pm kN) \; \forall n$ → δηλ. αν προσθέσω έναν ακέραιο αριθμό στο n, τότε τη χρονική στιγμή n+N έχει το ίδιο πλάτος με την τιμή n

για n_0 → $n_0 \pm kN$

$x(n_0) = x(n_0 + N)$

Δίνεται σήμα x(n)=n. Είναι περιοδικό;



αφού δεν υπάρχει ακέραιο N για να υπάρχει ίδιο πλάτος, <u>ΔΕΝ</u> είναι περιοδικό.

$$x(n) = \cos(0.125\pi n) = \cos\left(\frac{\pi}{8n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}n + 2\pi\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi n}{8} + \frac{16\pi}{8}\right) \Rightarrow x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}(n+16)\right)$$

Άρα το σήμα είνα περιοδικό με περίοδο u=16.

$$\bullet x(n)=\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}_{x_1(n)}+\underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{18}\right)}_{x_2(n)}$$

$$x_1(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{12}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{12}+\frac{24\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}(n+24)\right)\rightarrow N_1=24, \acute{\alpha}\rho\alpha\ \pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa\acute{o}$$

$$x_2(n)=\sin\left(\frac{n\pi}{18}\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{18}+2\pi\right)=\sin\left(\frac{n\pi}{18}+\frac{36\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{18}(n+36)\right)\rightarrow N_2=36, \acute{\alpha}\rho\alpha\ \pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa\acute{o}$$

$$N_{o\lambda}=\frac{N_1N_2}{\mathrm{M\Delta K}(N_1,N_2)}=\frac{24\cdot 36}{\mathrm{M\Delta K}(24,36)}=\frac{24\cdot 36}{12}=72, \acute{\alpha}\rho\alpha\ \kappa\alpha\iota\ \tau o\ \acute{\alpha}\theta\rho o\iota\sigma\mu\acute{\alpha}\ \tau o\upsilon\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota o\delta\iota\kappa\acute{o}$$

$$\bullet x(n)=\underbrace{e^{j\frac{\pi}{16}n}}_{x_1(n)}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{17}\right)}_{x_2(n)}$$

$$x_1(n)=e^{j\frac{\pi}{16}n}=\cos\left(\frac{\pi n}{16}\right)+j\sin\left(\frac{\pi n}{16}\right)=\cos\left(\frac{\pi n}{16}\right)=\cos\left(\frac{\pi n}{16}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi n}{16}+\frac{32\pi}{16}\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{16}(\mathrm{n}+32)\right)\rightarrow N=32$$

$$x_2(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{17}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{17}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{12}+\frac{34\pi}{17}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{17}(n+34)\right)\rightarrow N_1=34$$

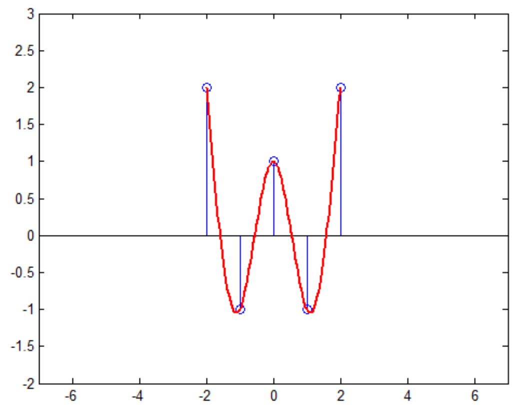
$$N_{o\lambda}=\frac{32\cdot 34}{\mathrm{M\Delta K}(32,34)}=\frac{32\cdot 34}{2}=544$$

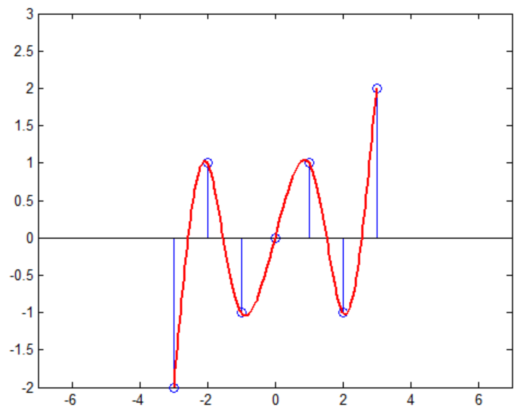
Συμμετρικές Ακολουθίες

-άρτια, x(n)=x(-n) (συμμετρικά ως προς τον κατακόρυφο άξονα)

-περιττά, x(n)=-x(-n)   (συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων)

<u>άρτιο</u> <u>περιττό</u>





$x_1(n)$: άρτιο

$x_2(n)$: περιττό

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$
$$x_1(n) = x_1(-n)$$
$$x_2(n) = -x_2(-n) \Rightarrow x_2(-n) = -x_2(n)$$
$$y(-n) = x_1(-n) \cdot x_2(-n) = x_1(n) \cdot [-x_2(n)] = -x_1(n) \cdot x_2(n) = -y(n) \Rightarrow y(-n) = -y(n)$$

άρα περιττό y(n)

- άρτιο · άρτιο = άρτιο
- άρτιο · περιττό = περιττό

όταν έχουμε άρτιο αριθμό περιττών σημάτων, βγαίνει άρτιο. Όταν έχουμε περιττό αριθμό περιττών σημάτων, βγαίνει περιττό.

$x_1(n)$: άρτιο → $x_1(n) = x_1(-n)$

$x_2(n)$: περιττό → $x_2(n) = -x_2(-n)$ → $x_2(-n) = -x_2(n)$

$x_3(n)$: περιττό → $x_3(n) = -x_3(-n)$ → $x_3(-n) = -x_3(n)$

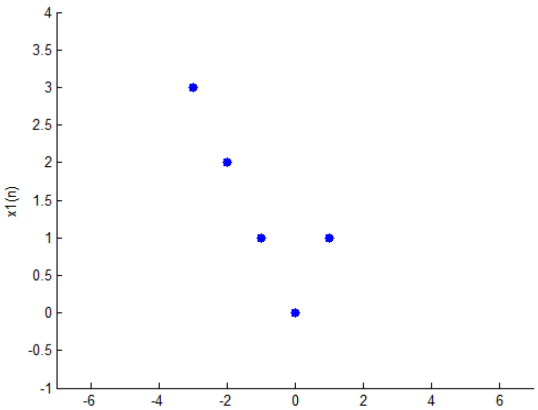
$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \cdot x_3(n)$

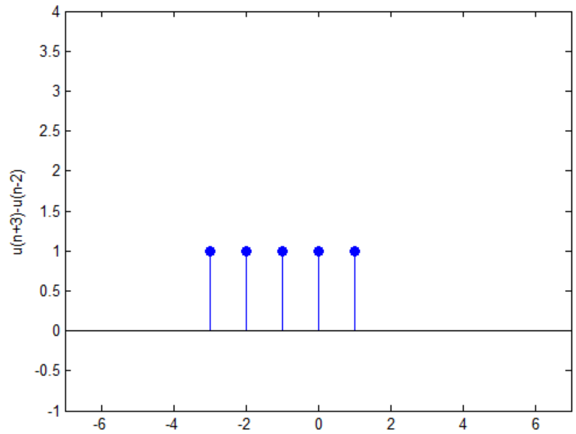
$$y(-n) = x_1(-n) \cdot x_2(-n) \cdot x_3(-n) = x_1(n) \cdot [-x_2(n)] \cdot [-x_3(n)] = x_1(n) \cdot x_2(n) \cdot x_3(n) \Rightarrow y(-n) = y(n)$$

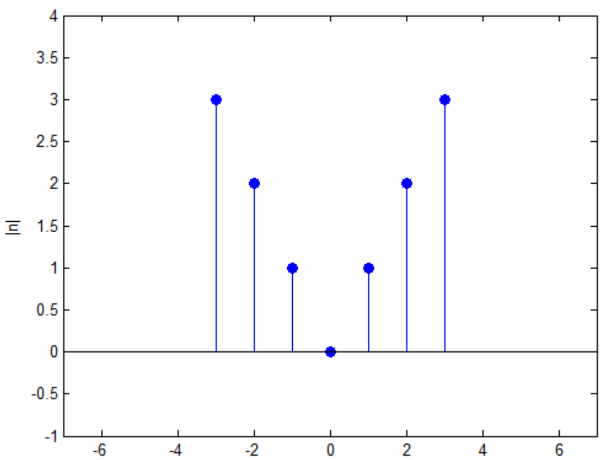
άρα άρτιο

5^o ΜΑΘΗΜΑ

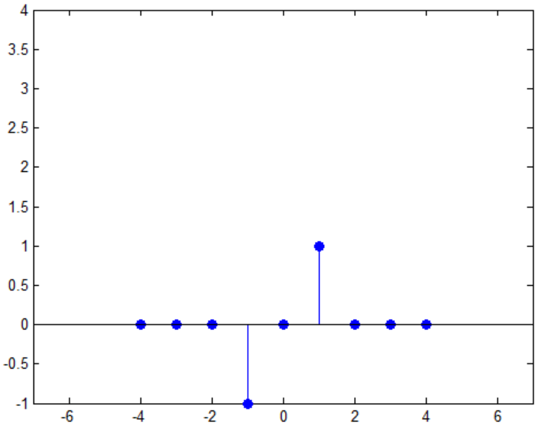
$$x_1(n) = |n|[u(n+3) - u(n-2)]$$

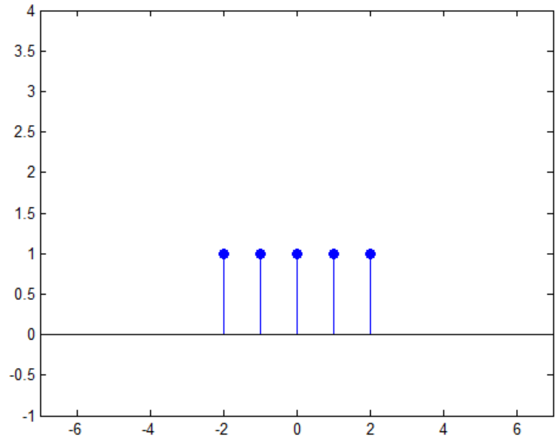




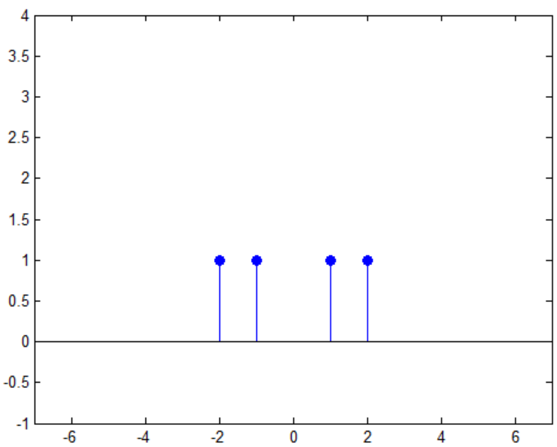


$$x_2(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)[u(n+2) - u(n-3)]$$


4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-6
-4
-2
0
2
4
6

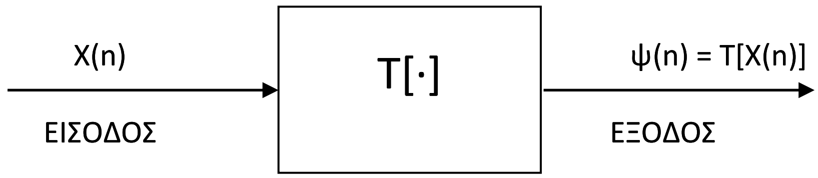

4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-6
-4
-2
0
2
4
6

$u(n+n_1)-u(n-n_2)$

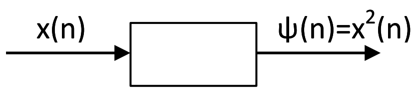

4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-6
-4
-2
0
2
4
6

Συστήματα Διακριτού Χρόνου

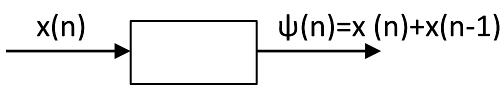
Σύστημα διακριτού χρόνου T[·]



π.χ. $\psi(n) = x^2(n)$



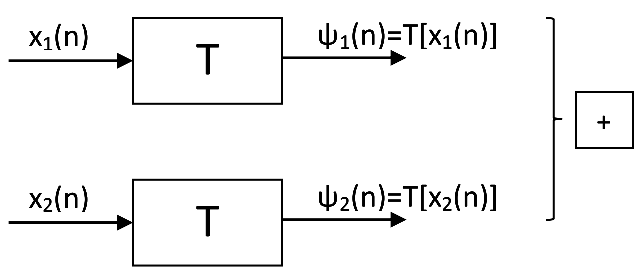
$x(n_0) \rightarrow x^2(n_0)$ δεν θέλει μνήμη



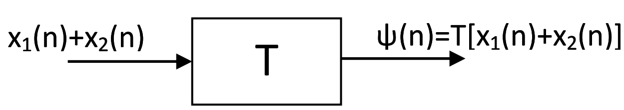
$x(n_0) \rightarrow \frac{x(n)}{x(n-1)}$ άρα πρόσθεση 2 χρονικών στιγμών, άρα θέλει μνήμη

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ</u>

- Υπέρθεση (Επαλληλία)



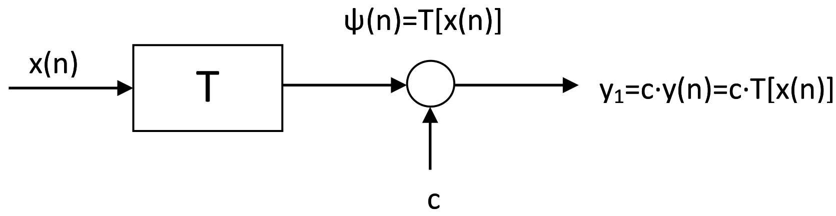
→ $\psi_1(n)+\psi_2(n)=T[x_1(n)]+T[x_2(n)]$ (1)

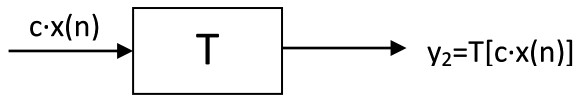


(2)

Αν το (1)=(2), τότε ισχύει η υπέρθεση και άρα θα ισχύει και $y(n) = y_1(n)+y_2(n)$

- Ομογένεια





αν το $y_1(n) = y_2(n)$ τότε ισχύει η ομογένεια.

π.χ. Έχω το σύστημα του διακριτού χρόνου y(n) = log(x(n)). Να εξεταστεί αν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης και η ομογένεια.

$$T[cx(n)] \overset{?}{=} cT[x(n)]$$

$$\log(cx(n)) \overset{?}{=} c\log(x(n)) \Rightarrow \log(c) + \log(x(n)) \overset{?}{\neq} c\log(x(n))$$

Πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές του n και του c. Αφού αυτό δεν ισχύει παρά ίσως για μία μόνο τιμή, το αρχικό <u>δεν ισχύει</u>, άρα το σύστημα δεν είναι ομογενές.

$$T[x_1(n) + x_2(n)] \overset{?}{=} T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$$

$$\log(x_1(n) + x_2(n)) \overset{?}{=} \log(x_1(n)) + \log(x_2(n))$$

$$\log(x_1(n) + x_2(n)) \overset{?}{\neq} \log(x_1(n) \cdot x_2(n))$$

άρα δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης

π.χ. $y(n) = 6x(n) + \dfrac{x(n+1) \cdot x(n-1)}{x(n)}$ υπέρθεση? ομογένεια?

$$T[\mathrm{x}_1(\mathrm{n})+\mathrm{x}_2(\mathrm{n})]\overset{?}{=}T[\mathrm{x}_1(\mathrm{n})]+T[\mathrm{x}_2(\mathrm{n})]$$

$$6(\mathrm{x}_1(\mathrm{n})+\mathrm{x}_2(\mathrm{n}))+\frac{(\mathrm{x}_1(\mathrm{n}+1)+\mathrm{x}_2(\mathrm{n}+1))\cdot(\mathrm{x}_1(\mathrm{n}-1)+\mathrm{x}_2(\mathrm{n}-1))}{\mathrm{x}_1(\mathrm{n})+\mathrm{x}_2(\mathrm{n})}\overset{?}{\neq}$$

$$6\,\mathrm{x}_1(\mathrm{n})+\frac{\mathrm{x}_1(\mathrm{n}+1)\cdot\mathrm{x}_1(\mathrm{n}-1)}{\mathrm{x}_1(\mathrm{n})}+6\,\mathrm{x}_2(\mathrm{n})+\frac{\mathrm{x}_2(\mathrm{n}+1)\cdot\mathrm{x}_2(\mathrm{n}-1)}{\mathrm{x}_2(\mathrm{n})}$$

άρα δεν ισχύει η αρχή της υπέρθεσης

$$T[c\cdot x(n)]\overset{?}{=}cT[x(n)]$$

$$6(\mathrm{c}\cdot\mathrm{x}(\mathrm{n}))+\frac{(c\cdot x(n+1))\cdot(c\cdot x(n-1))}{c\cdot x(n)}\overset{?}{=}c\left(6x(n)+\frac{x(n+1)\cdot x(n-1)}{x(n)}\right)\Rightarrow$$

$$6cx(\mathrm{n})+\frac{cx(n+1)x(n-1)}{x(n)}\overset{?}{=}6cx(n)+c\,\frac{x(n+1)x(n-1)}{x(n)}$$

άρα ισχύει η ομογένεια

π.χ. $y(n)=x(n)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ υπέρθεση? ομογένεια?

$$T[\mathrm{x}_1(\mathrm{n})+\mathrm{x}_2(\mathrm{n})]\overset{?}{=}T[\mathrm{x}_1(\mathrm{n})]+T[\mathrm{x}_2(\mathrm{n})]$$

$$(\mathrm{x}_1(\mathrm{n})+\mathrm{x}_2(\mathrm{n}))\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\overset{?}{\neq}\mathrm{x}_1(\mathrm{n})\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\mathrm{x}_2(\mathrm{n})\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

άρα ισχύει η αρχή της υπέρθεσης

$$T[c\cdot x(n)]\overset{?}{=}cT[x(n)]$$

$$(\mathrm{c}\cdot\mathrm{x}(\mathrm{n}))\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\overset{?}{=}c\left(x(n)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow$$

$$6cx(\mathrm{n})+\frac{cx(n+1)x(n-1)}{x(n)}\overset{?}{=}6cx(n)+c\,\frac{x(n+1)x(n-1)}{x(n)}$$

άρα ισχύει η ομογένεια

Γραμμικό Σύστημα

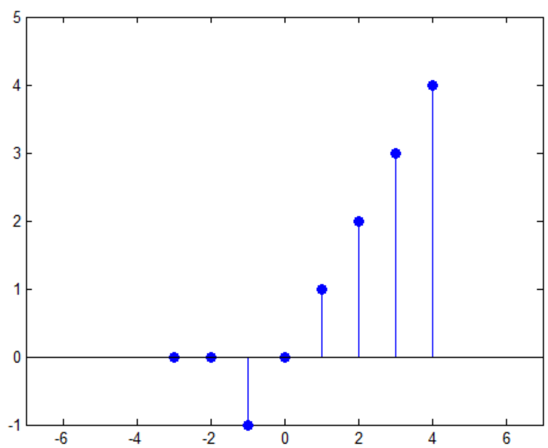
$$T[a_1\,\mathrm{x}_1(\mathrm{n})+a_2\,\mathrm{x}_2(\mathrm{n})]=a_1T[\mathrm{x}_1(\mathrm{n})]+a_2T[\mathrm{x}_2(\mathrm{n})]$$

το σύστημα στο οποίο ισχύει και η ομογένεια αλλά και η αρχή της υπέρθεσης.

6ο ΜΑΘΗΜΑ

$$x(n)=n(u(n+1)-u(n-1)]$$

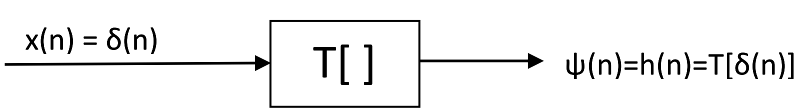
$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$



$$x(n)=x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(0)+x(1)\delta(n-1)+x(2)\delta(n-2)+x(3)\delta(n-3)+\ldots+x(k)\delta(n-k)$$

Κρουστική Απόκριση

x(n) = δ(n)



έξοδος συστήματος όταν θέσουμε στην είσοδο τη μοναδιαία διακριτή ώση.

- Αμεταβλητότητα στη μετατόπιση

Αν το σύστημα είναι αμετάβλητο, τότε η είσοδος μετατοπίζεται 2 θέσεις αριστερά. Τότε και στην έξοδο θα μετατοπιστεί 2 θέσεις αριστερά.

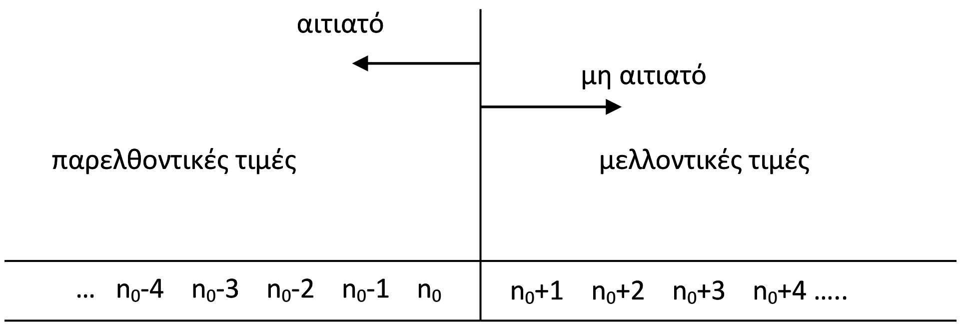
Η μετατόπιση θα είναι ίδια. Το $\psi(n)=3$ είναι μεταβλητό.

- Γραμμικά συστήματα αμετάβλητα στη μετατόπιση

Τα συστήματα που είναι γραμμικά όσο και αμετάβλητα στη μετατόπιση

a) υπέρθεση
b) ομογένεια — πρέπει να ισχύουν
c) αμεταβλητότητα

- Αιτιότητα



Το σύστημα είναι <u>αιτιατό</u> όταν εξαρετάται από τις παρελθοντικές τιμές χρόνου έως την παροντική, π.χ. $\psi(n_0) = x(n_0+3)$, $y(n_0) = x(n_0)$. Ενώ μη αιτιατό όταν εξαρτάται από μελλοντικές, π.χ. $y(n) = x(n_0-6)$.

$$\bullet\, y(n_0)=\frac{1}{2}x(n_0)-\frac{\sqrt{3}}{\pi}x(n_0-7)+\frac{x(n_0+1)}{12}\Rightarrow \textit{μη αιτιατό}$$

$$\bullet\, y(n_0)=cx(n_0-1)\Rightarrow \textit{αιτιατό γιατί δεν εξαρτάται από τους συντελεστές}$$

$$\bullet\, y(n)=\frac{x(n+5)x(n-1)x(n-2)}{x(n)}\Rightarrow \textit{αιτιατό}$$

$$\bullet\, y(n)=x(n_0+3)x(n_0-1)\Rightarrow \textit{μη αιτιατό}$$

$$\bullet\, y(n)=x(-\mathrm{n})\ \textit{για}\ n_0\geq 0\ \ n_0\geq -n_0\Rightarrow y(n_0)\ \textit{μετά το}\ x(-n_0)$$
$$\textit{για}\ n_0<0\ \ n_0<-n_0\Rightarrow y(n_0)\ \textit{πριν το}\ x(-n_0)$$

π.χ. n=3 → y(3) = x(-3)

n=-3 → y(-3) = x(-(-3)) = x(3)

$$\bullet\, y(n)=x(|n|)=\begin{cases} x(n), n\geq 0 & \textit{αιτιατό} \\ x(-n), n<0 & \textit{αφού από το προηγούμενο δεν είναι αιτιατό}\end{cases}$$

$$|\mathrm{n}|=\begin{cases} n, n\geq 0 \\ -n, n<0\end{cases}$$

άρα το σύστημα <u>δεν</u> είναι αιτιατό.

$$\bullet\, y(n_0)=u(n+3)x(n_0)+u(-n)x(-n_0)$$

αφού είναι μια συνάρτηση γνωστή που δεν την παίρνουμε στην είσοδο, δεν μας ενδιαφέρει

(1) $n \in (-\infty, -4]: y(n) = u(n+3)x(n) + u(-n)x(-n)$

$$y(\mathrm{n}) = 0 \cdot \mathrm{x}(\mathrm{n}) + 1 \cdot \mathrm{x}(-\mathrm{n}) = \mathrm{x}(-\mathrm{n})$$

$\mu\eta\, \alpha\iota\tau\iota\alpha\tau\acute{o}$

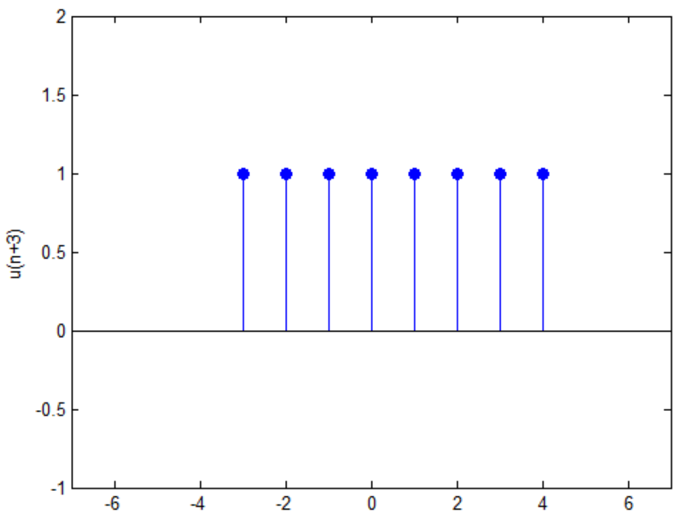
(2) $n \in [-3, 0]: \ y(\mathrm{n}) = 1 \cdot \mathrm{x}(\mathrm{n}) + 1 \cdot \mathrm{x}(-\mathrm{n}) = x(n) + \mathrm{x}(-\mathrm{n})$

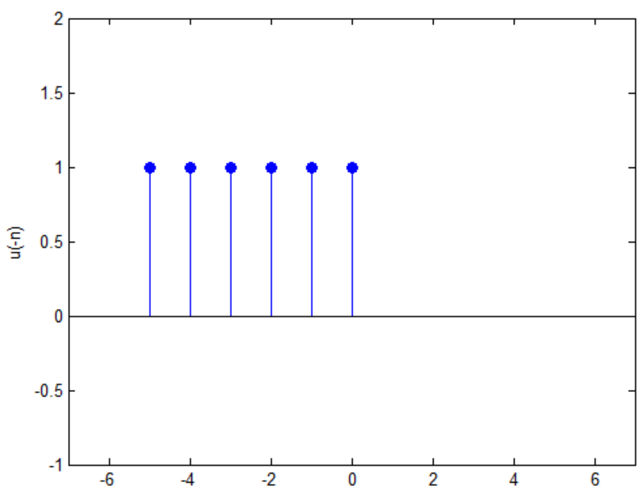
$\mu\eta\, \alpha\iota\tau\iota\alpha\tau\acute{o}$

(3) $n \in [1, \infty): \ y(\mathrm{n}) = 1 \cdot \mathrm{x}(\mathrm{n}) + 0 \cdot \mathrm{x}(-\mathrm{n}) = x(n)$

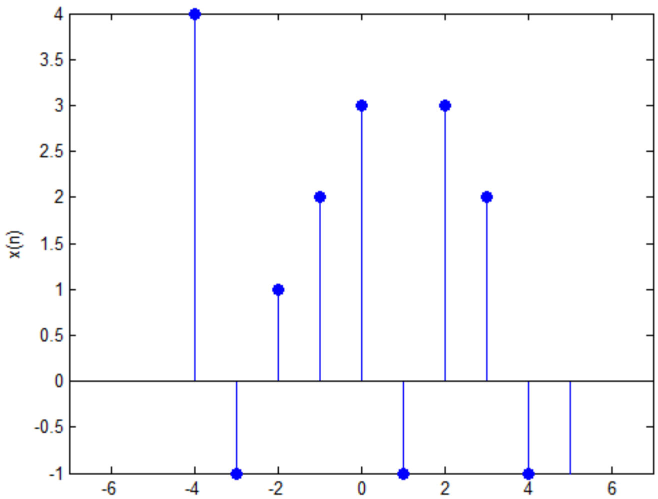
$\alpha\iota\tau\iota\alpha\tau\acute{o}$

άρα συνολικά το αρχικό σύστημα είναι <u>μη αιτιατό</u>!

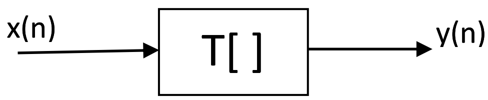




- Ευστάθεια



αν $|x(n)| \leq A < \infty$ → φραγμένο σύστημα

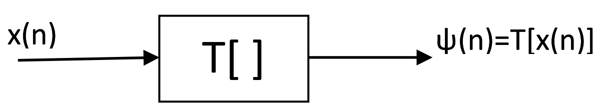


τότε $|y(n)| \leq B < \infty$ θα είναι φραγμένη και η έξοδος, <u>όχι</u> με την ίδια τιμή πλάτους στη φραγή.

x(n) = n ➔ μη φραγμένη

$y(n) = \sin(\mathrm{x(n)}) \leq 1 < \infty$ ➔ <u>ευσταθές</u> γιατί το sin είναι φραγμένη συνάρτηση μεταξύ του -1<sin<1.

- Αντιστρεψιμότητα



$$\alpha\nu\ y(n) = 2x(n) \Rightarrow x(n) = \frac{1}{2}y(n)$$

$$n = 3 \rightarrow x(3) = 2 \rightarrow y(3) = 2x(3) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$n = -5 \rightarrow x(-5) = 7 \rightarrow y(-5) = 2x(-5) = 2 \cdot 7 = 14$$

$$\gamma\iota\alpha\ n = -5 \rightarrow y(-5) = 14, \acute{\alpha}\rho\alpha\ x(-5) = \frac{1}{2}y(-5) = \frac{1}{2} \cdot 14 \Rightarrow x(-5) = 7$$

όταν από την έξοδο μπορώ να βρω την είσοδο, τότε το σύστημα λέγεται αντιστρέψιμο.

$$\bullet\, y(n) = nx(n) \Rightarrow x(n) = \frac{1}{n}y(n)$$

$$n = 5 \to y(5) = 10 \to x(5) = \frac{1}{5}\cdot 10 = 2$$

$$n = 0 \to y(0) = 7 \to x(0) = ?$$

αφού υπάρχει έστω μια τιμή για την οποία δεν μπορώ να υπολογίσω την είδοσο, το σύστημα λέγεται μη αντιστρέψιμο.

$\bullet\, y(n) = (n-1)x(n) \Rightarrow x(n) = \dfrac{1}{n-1}y(n)$ μη αντιστρέψιμο για n=1, άρα όλο μη αντιστρέψιμο

$\bullet\, y(n) = \left(n - \dfrac{3}{2}\right)x(n) \Rightarrow x(n) = \dfrac{1}{n-\dfrac{3}{2}}y(n)$ αντιστρέψιμο αφού το n είναι πάντα ακέραιος αριθμός

$\bullet\, y(n) = (n-\pi)x(n) \Rightarrow x(n) = \dfrac{y(n)}{n-\pi}$ αντιστρέψιμο

$$\bullet\, y(n) = (n^2 + n - 2)x(n) \Rightarrow x(n) = \frac{y(n)}{n^2+n-2} \Rightarrow x(n) = \frac{y(n)}{n(n-1)+2(n-1)} = \frac{y(n)}{(n-1)(n+2)}$$

για n=1 και n=-2 μη αντιστρέψιμο

$\bullet\, y(n) = (n^2+1)x(n) \Rightarrow x(n) = \dfrac{y(n)}{n^2+1}, \quad n^2+1 \neq 0 \Rightarrow n^2 \neq -1$ αντιστρέψιμο

7° ΜΑΘΗΜΑ

$$y(n) = \delta(n+3)x(n-2) + u(n)x(|n|)$$

παρελθοντική τιμή

1

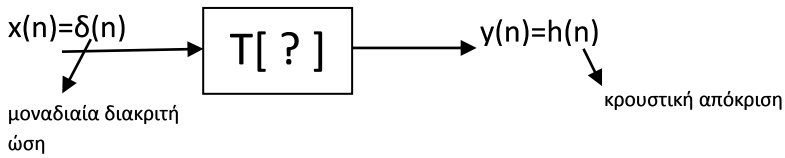
τρέχουσα τιμή

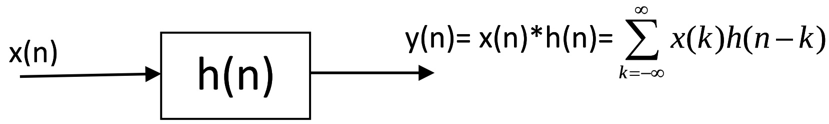
$$y(n) = \begin{cases} \delta(n+3)x(n-2) + u(n)\mathrm{x(n)}, & \gamma\iota\alpha\ n \geq 0 \\ \delta(n+3)x(n-2) + u(n)\mathrm{x(-n)}, & \gamma\iota\alpha\ n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \delta(n+3)x(n-2) + \mathrm{x(n)}, & \gamma\iota\alpha\ n \geq 0 \\ \delta(n+3)x(n-2), & \gamma\iota\alpha\ n < 0 \end{cases}$$

0

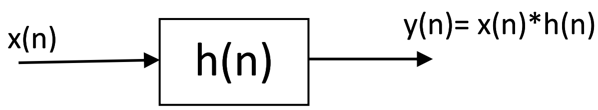
- ✓ **Συνέλιξη**

Η σχέση μεταξύ της εισόδου x(n) ενός γραμμικού συστήματος και αμετάβλητου κατά τη μετατόπιση και της εξόδου y(n) δίνεται από το άθροισμα της Συνέλιξης.

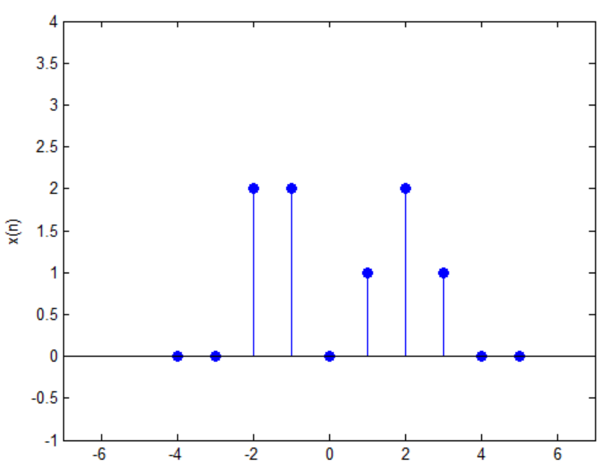




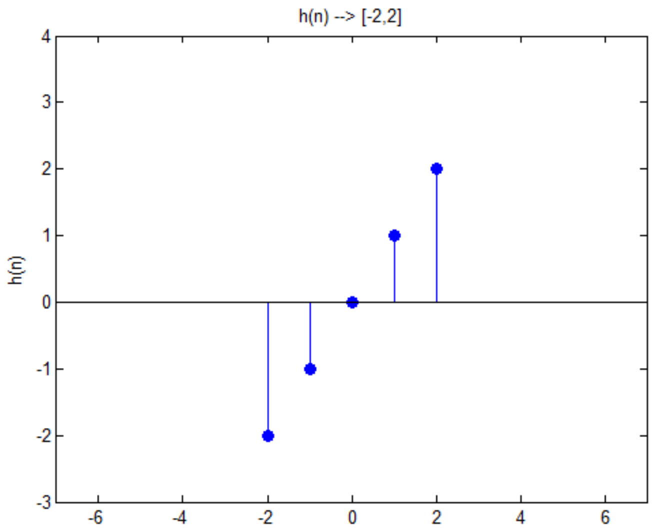
- Ιδιότητες
    a) Αντιμεταθετική → $x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$
    b) Προσεταιριστική → $[x(n)*\mathrm{h}_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[\mathrm{h}_1(n)*h_2(n)]$
    c) Επιμεριστική → $x(n)*[\mathrm{h}_1(n)+h_2(n)]=x(n)*\mathrm{h}_1(n)+\mathrm{x(n)}*h_2(n)]$



πεπερασμένο στο διάστημα [-2,3]



πεπερασμένου μήκους

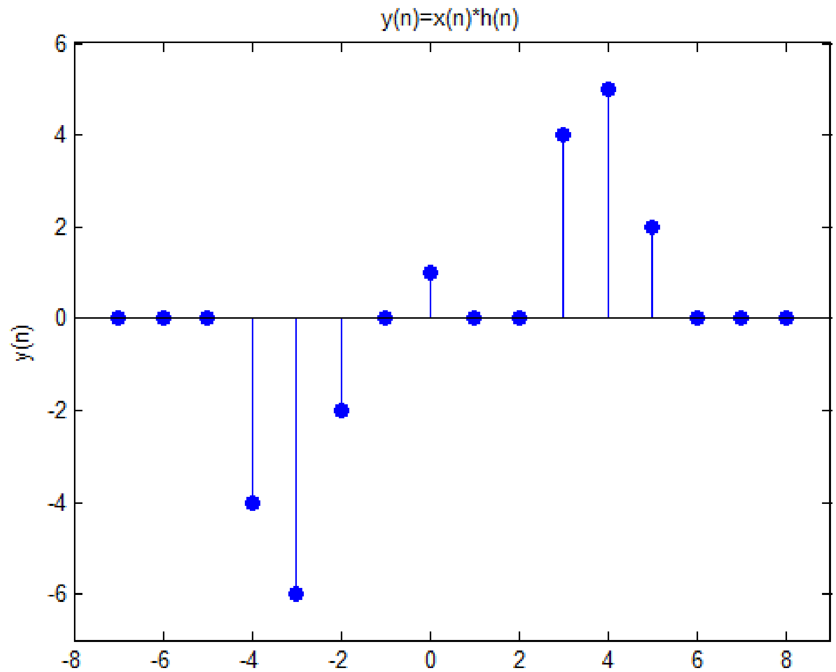


y(n) → πεπερασμένο στο διάστημα [-2+(-2),3+2]=[-4,5]

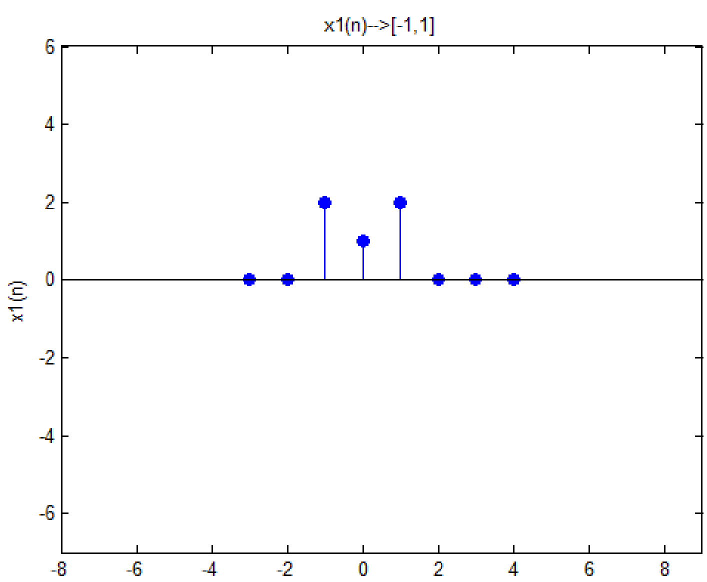
- Υπολογισμός της Συνέλιξης
    a) μέθοδος του κανόνα (Μόνο σε σήματα πεπερασμένου μήκους)

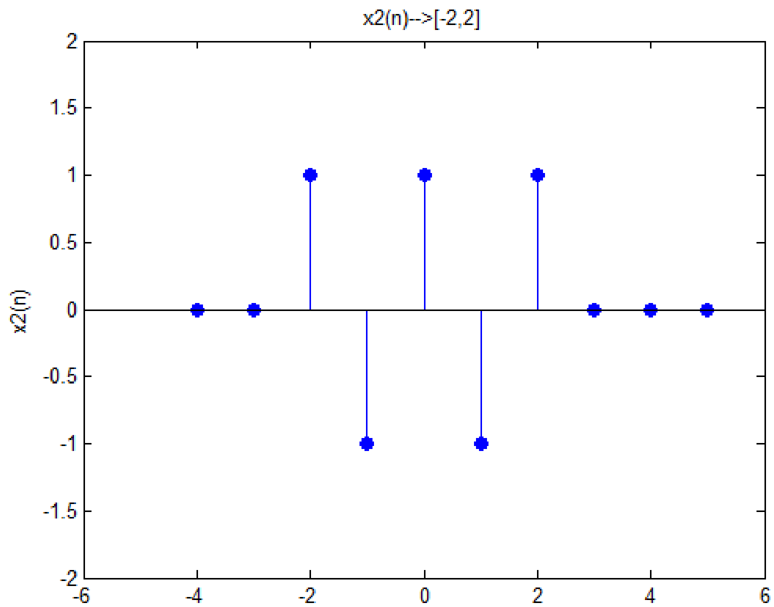
Τιμές πλάτους συνέλιξης	x(-2)	x(-1)	x(0)	x(1)	x(2)	x(3)
x(n)	2	2	0	1	2	1
$y(-4)=2(-2)=-4$	-2					
$y(-3)=2(-1)+2(-2)=$ $-2-4=-6$	-1	-2				
$y(-2)=2\cdot 0+2(-1)+0(2)=$ $0-2+0=-2$	0	-1	-2			
$y(-1)=2\cdot 1+2\cdot 0+0(-1)+1(-2)=$ $2+0+0-2=0$	1	0	-1	-2		
$y(0)=2\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot 0+1(-1)=1$	2	1	0	-1	-2	
$y(1)=2\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 0+2(-1)+1(-2)=$ $4+0+0-2-2=0$		2	1	0	-1	-2
$y(2)=0\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 0+1(-1)=$ $0+1+0-1=0$			2	1	0	-1
$y(3)=1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 0=2+2+0=4$				2	1	0
$y(4)=2\cdot 2+1\cdot 1=4+1=5$					2	1
$y(5)=1\cdot 2=2$						2

γραφική παράσταση συνέλιξης



π.χ.



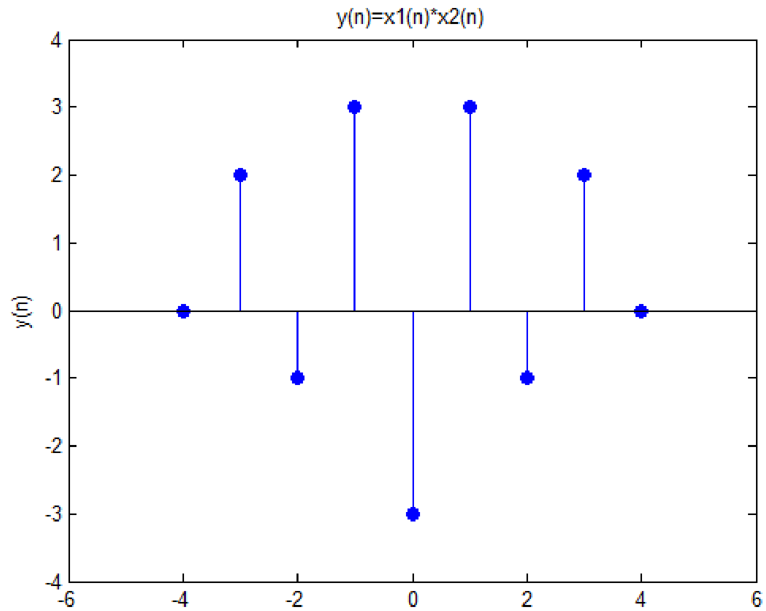


x(-2)	x(-1)	x(0)	x(1)	x(2)
1	-1	1	-1	1
2				
1	2			
2	1	2		
	2	1	2	
		2	1	2
			2	1
				2

$y(n)=x_1(n)*x_2(n)$ →

- ➔ [-1+(-2),1+2] → [-3,3]

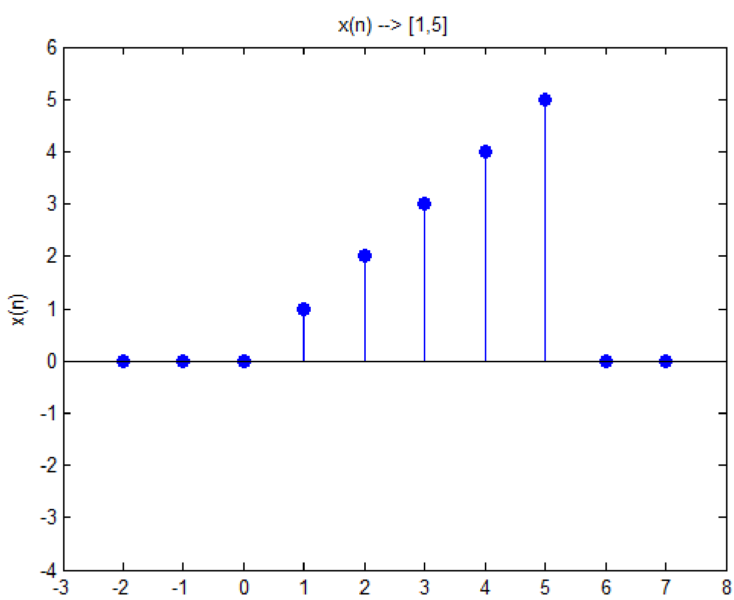
$$y(-3)=1\cdot 2=2$$
$$y(-2)=1\cdot 1+(-1)\cdot 2=1-2=-1$$
$$y(-1)=1\cdot 2+(-1)\cdot 1+1\cdot 2=2-1+2=3$$
$$y(0)=(-1)\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 2=-2+1-2=-3$$
$$y(1)=1\cdot 2+(-1)\cdot 1+1\cdot 2=2-1+2=3$$
$$y(2)=(-1)\cdot 2+1\cdot 1=-2+1=-1$$
$$y(3)=1\cdot 2=2$$



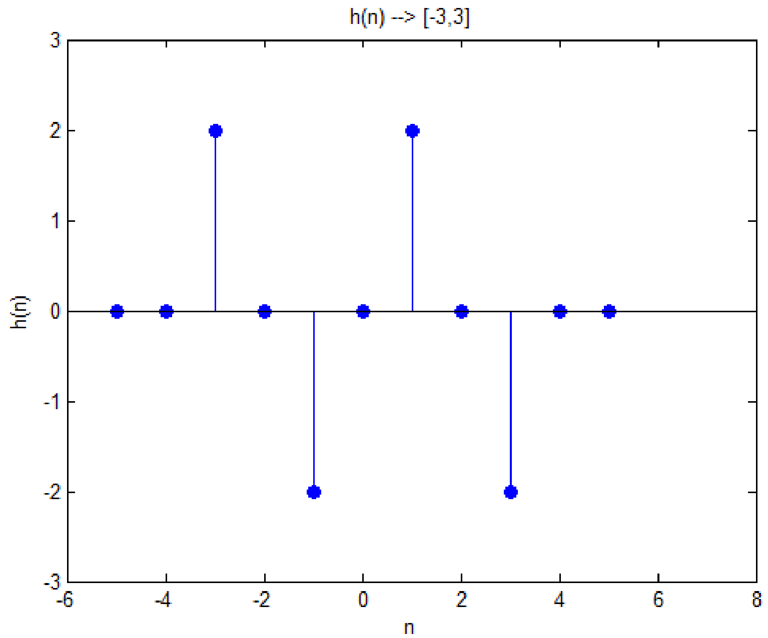
8^{o} ΜΑΘΗΜΑ

$$x(n) = 0.5n[u(n) - u(n-6)]$$

$$h(n) = 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)[u(n+3) - u(n-4)]$$

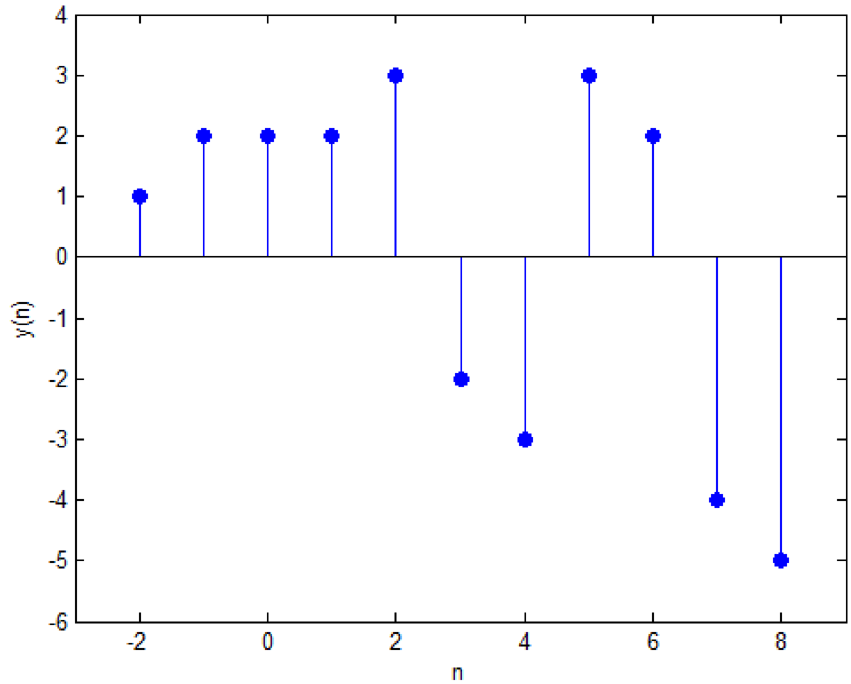


$h(-n) = [-2, 0, 2, 0, 2, 0, 2]$



y(n) → [1+(-3),5+3] → [-2,8]

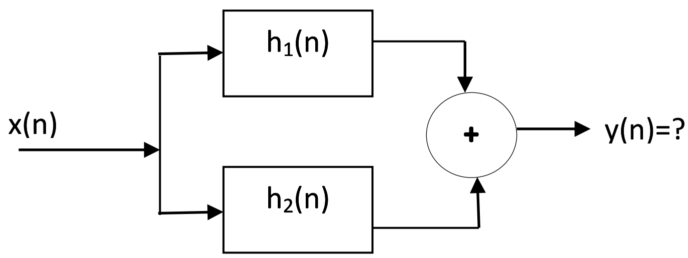
x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	
0.5	1	1.5	2.0	2.5	
2					y(-2)=1
0	2				y(-1)=2
-2	0	2			y(0)=2
0	-2	0	2		y(1)=2
2	0	-2	0	2	y(2)=3
0	2	0	-2	0	y(3)=-2
-2	0	2	0	-2	y(4)=-3
	-2	0	2	0	y(5)=3
		-2	0	2	y(6)=2
			-2	0	y(7)=-4
				-2	y(8)=-5

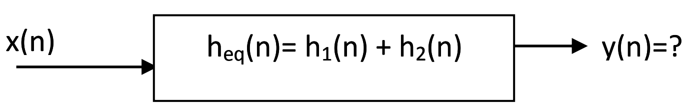


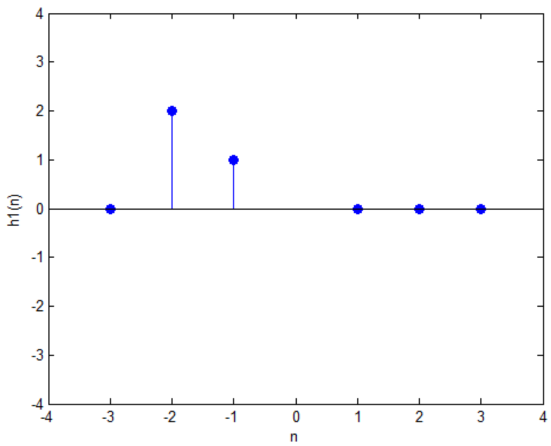
$$x(n) = n[u(n+1) - u(n-2)]$$

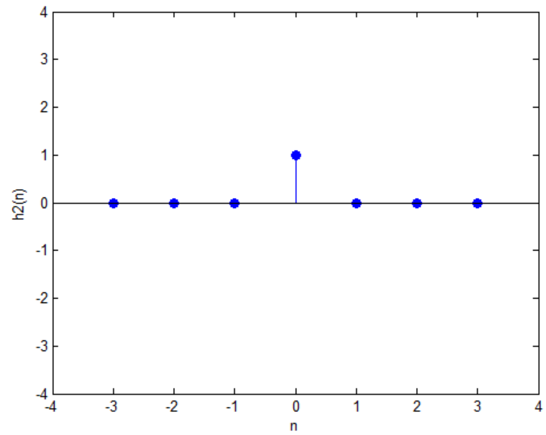
$$h_1(n) = |n|[u(n+2) - u(n-1)]$$

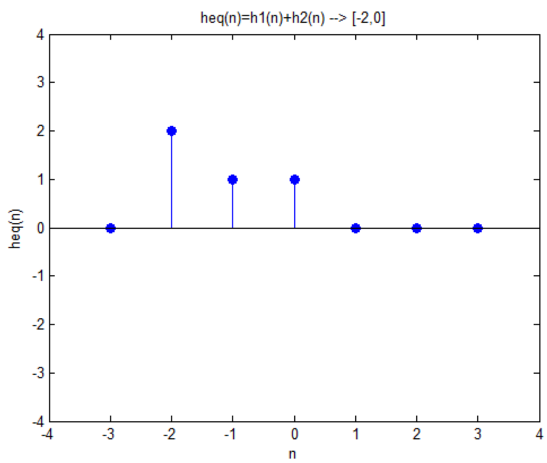
$$h_2(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)[u(n+1) - u(n-1)]$$

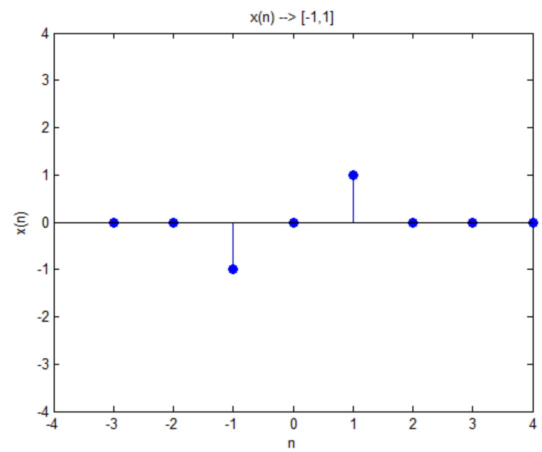






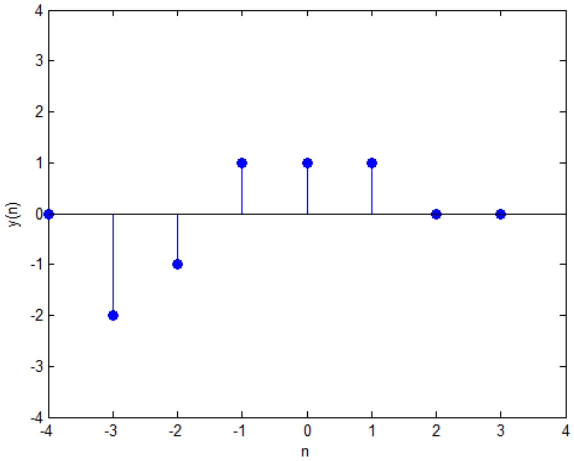






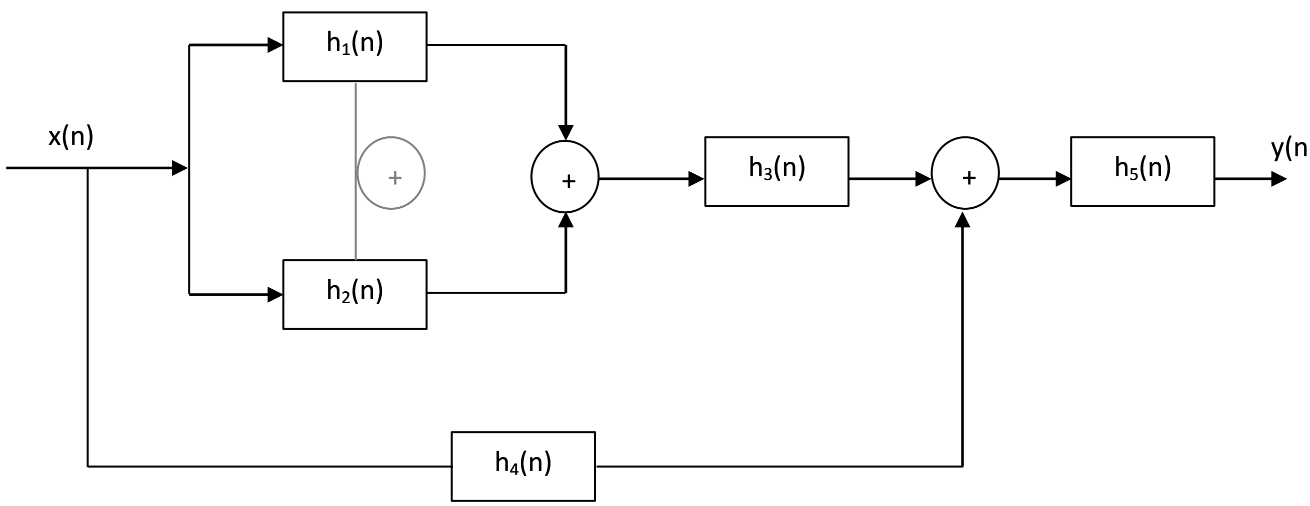
$h_{eq}(-2)$	$h_{eq}(-1)$	$h_{eq}(0)$	
2	1	1	
-1			y(-3)=-2
0	-1		y(-2)=-1
1	0	-1	y(-1)=1
	1	0	y(0)=1
		1	y(1)=1

$y(n)=-2\delta(n+3)-1\delta(n+2\_+1\delta(n+1)+1\delta(n)+\delta(n-1)$



$h_{1,2}=h_1(n)+h_2(n)$

$h_{12,3}=h_{12}(n)*h_3(n)=[\ h_1(n)+h_2(n)]*\ h_3(n)$



$h_{123,4}=h_{123}(n)+h_4(n)$

$$ά\rho\alpha\; h_{o\lambda}(n)=\big[[h_1(n)+h_2(n)]*h_3(n)+h_4(n)\big]*h_5(n)$$

$$y(n)=x(n)*h_{o\lambda}(n)$$

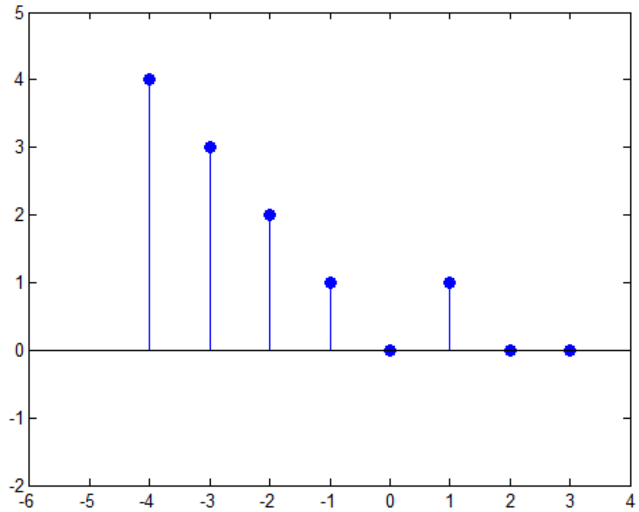
$$x(n)=a^n u(n)$$
$$h(n)=u(n)$$
$$y(n)=x(n)*h(n)?$$

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)u(n-k)\Rightarrow$$
$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{-1}a^k \cancelto{0}{u(k)}u(n-k)+\sum_{k=0}^{\infty}a^k \cancelto{1}{u(k)}u(n-k)\Rightarrow$$
$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k u(n-k)=\sum_{k=0}^{n}a^k \cancelto{1}{u(n-k)}+\sum_{k=n+1}^{\infty}a^k \cancelto{0}{u(n-k)}\Rightarrow$$
$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}a^k\Rightarrow\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}a^n=\frac{1-a^N}{1-a}$

9ο ΜΑΘΗΜΑ

$$x(n)=|n|[u(n+4)-u(n-2)]$$



- Απευθείας Υπολογισμός Συνέλιξης

$$\bullet A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a \cdot u(k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a \cdot u(k) + \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot u(k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 0 + \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot 1 = \sum_{k=0}^{\infty} a$$

$$\bullet B = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b \cdot u(n-2) = \sum_{k=-\infty}^{1} b \cdot u(n-2) + \sum_{k=2}^{\infty} b \cdot u(n-2) = \sum_{k=2}^{\infty} b$$

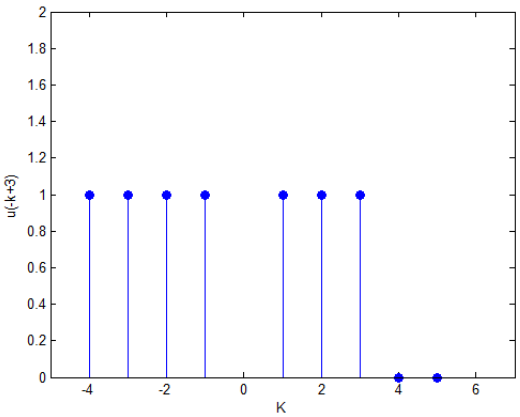
εξαρτάται από τον όρο του αθροίσματος που θια κόψουμε τα όρια.

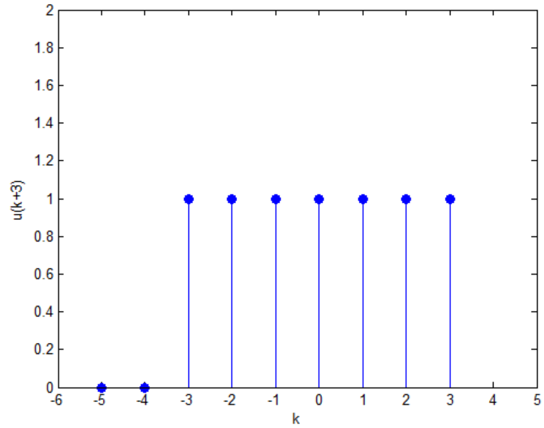
$$\bullet C = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c \cdot u(-k) = \sum_{k=-\infty}^{0} c \cdot u(-k) + \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot u(-k) = \sum_{k=-\infty}^{0} c$$

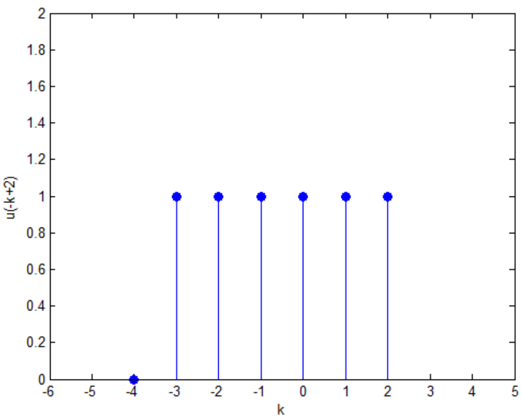
$$\bullet D = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d \cdot [u(k+3) - \mathrm{u(k-4)}] = \sum_{k=-\infty}^{-4} d \cdot [u(k+3) - \mathrm{u(k-4)}] + \sum_{k=-3}^{3} d \cdot [u(k+3) - \mathrm{u(k-4)}] +$$
$$\sum_{k=4}^{\infty} d \cdot [u(k+3) - \mathrm{u(k-4)}] = \sum_{k=-3}^{3} d = 7d$$

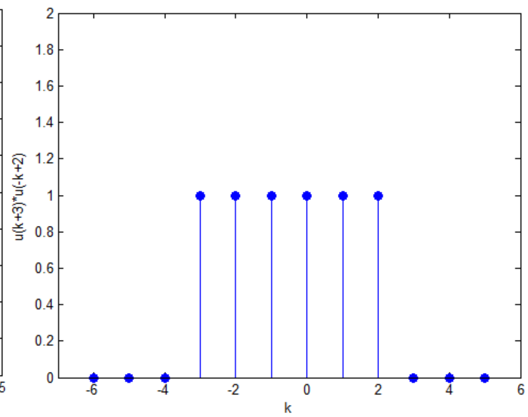
$$\bullet M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m \cdot u(-k+3) = \sum_{k=-\infty}^{3} m \cdot u(-k+3) + \sum_{k=4}^{\infty} m \cdot u(-k+3) = \sum_{k=-\infty}^{3} m$$

$$\bullet N = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n \cdot u(k+3) \cdot \mathrm{u(-k+2)} = \sum_{k=-\infty}^{-4} n \cdot u(k+3) \cdot \mathrm{u(-k+2)} + \sum_{k=-3}^{2} n \cdot u(k+3) \cdot \mathrm{u(-k+2)} +$$
$$\sum_{k=3}^{\infty} n \cdot u(k+3) \cdot \mathrm{u(-k+2)} = \sum_{k=-3}^{2} n = 6n$$









$$\bullet L=\sum_{k=-\infty}^{\infty} l^k\cdot u(-k+2)=\sum_{k=-\infty}^{2} l^k\cdot u(-k+2)+\sum_{k=3}^{\infty} l^k\cdot u(-k+2)=\sum_{k=-\infty}^{2} l^k \underset{n=-k}{\overset{k=-n}{\Longrightarrow}} L=\sum_{(-n)=-\infty}^{(-n)=2} l^{(-n)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\sum_{n=\infty}^{n=-2}\frac{1}{l^n}$$

$$x(n)=a^n\cdot u(n)$$
$$h(n)=u(n)$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(\mathrm{k})u(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k u(\mathrm{k})u(n-k)+\sum_{k=0}^{+\infty} a^k u(\mathrm{k})u(n-k)\Rightarrow$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k u(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k u(-\mathrm{k}+n)=\sum_{k=0}^{n} a^k u(-\mathrm{k}+n)+\sum_{k=n+1}^{\infty} a^k u(-\mathrm{k}+n)\Rightarrow$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n} a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

n=N-1 ➔ N=n+1

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

για n≥0

για n<0 ➔ y(n)=0

$$y(n) = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a},\ \gamma\iota\alpha\ n \geq 0 \\ 0,\ \gamma\iota\alpha\ n < 0 \end{cases} \quad ή \quad y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \cdot u(n)$$

ΣΕΛΙΔΑ 34 – ΣΧΗΜΑ ΚΑΤΩ-ΚΑΤΩ

Συνέλιξη με τον εαυτό του να βρω την πρώτη μη μηδενική τιμή και την τελευταία.

	x(-6)	… …	x(24)	
x(24)…….x(-5)	x(-6)			y(-12)=x(-6)·x(-6)
				y(48)=x(24)·x(24)
			x(24)	x(23)…x(-6)

$$ά\rho\alpha\ y(-12) = x(-6)^2 = 3^2 = 9$$

$$y(48) = x(24)^2 = (-4)^2 = 16$$

10ο ΜΑΘΗΜΑ

$$x(n)=0.9^{n}u(n)$$
$$h(n)=n\cdot u(n)$$
$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)\cdot h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}0.9^{k}u(k)\cdot[(n-k)\cdot u(n-k)]$$
$$\Rightarrow y(n)=\sum_{k=-\infty}^{-1}0.9^{k}u(k)\cdot[(n-k)\cdot u(n-k)]+\sum_{k=0}^{+\infty}0.9^{k}u(k)\cdot[(n-k)\cdot u(n-k)]$$
$$\Rightarrow y(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}0.9^{k}(n-k)\cdot u(n-k)$$
$$u(n-k)=\begin{cases}1, n\geq k\\ 0, n<k\end{cases}$$
$$-\gamma\iota\alpha\ n<0\Rightarrow u(n-k)=0\Rightarrow y(n)=0$$
$$-\gamma\iota\alpha\ n\geq 0\Rightarrow \sum_{k=0}^{n}0.9^{k}(n-k)u(n-k)+\sum_{k=n+1}^{\infty}0.9^{k}(n-k)u(n-k)\Rightarrow$$

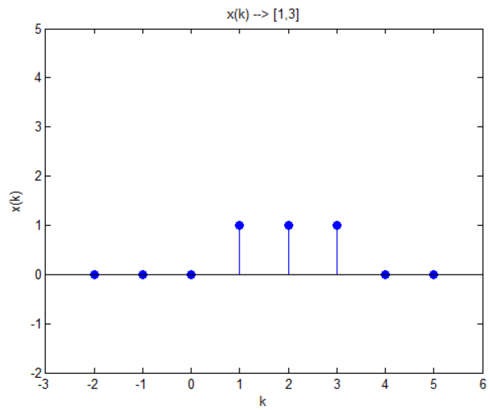
Δυναμοσειρές

$$\Rightarrow y(n)=\sum_{k=0}^{n}0.9^{k}(n-k)$$
$$\Rightarrow y(n)=\sum_{k=0}^{n}0.9^{k}n-\sum_{k=0}^{n}0.9^{k}k$$
$$\Rightarrow y(n)=n\sum_{k=0}^{n}0.9^{k}-\sum_{k=0}^{n}0.9^{k}k$$
$$\Rightarrow y(n)=n\frac{1-0.9^{(n+1)}}{1-0.9}-\frac{((n+1)-1)\cdot 0.9^{(n+1)+1}-(n+1)\cdot 0.9^{(n+1)}+0.9}{(1+0.9)^{2}}$$
$$\Rightarrow y(n)=n\frac{1-0.9^{(n+1)}}{0.1}-\frac{n\cdot 0.9^{(n+2)}-(n+1)\cdot 0.9^{(n+1)}+0.9}{0.01},\ \gamma\iota\alpha\ n\geq 0$$

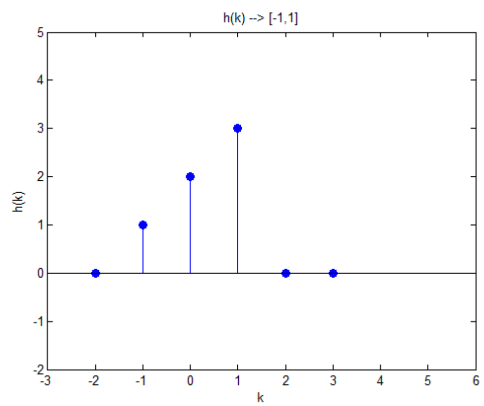
$$\boxed{y(n)=\left(n\frac{1-0.9^{(n+1)}}{0.1}-\frac{n\cdot 0.9^{(n+2)}-(n+1)\cdot 0.9^{(n+1)}+0.9}{0.01}\right)\cdot u(n)}$$

- Συνέλιξη με γραφική Προσέγγιση

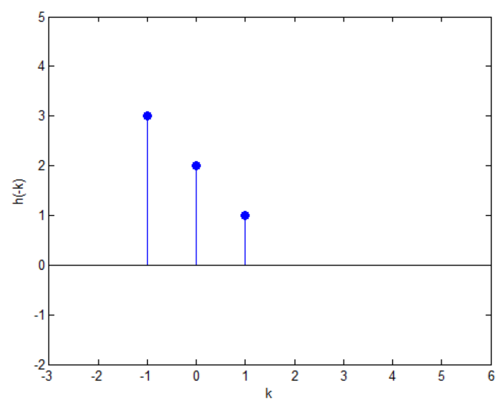
$$y(n)=x(n)*h(n)$$
$$x(k)\rightarrow[1,3]$$



$$y(0)=x(0)*h(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(0-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(-k)=\ldots+0+x(1)h(-1)+0+\ldots=1$$



Γιατί αν δούμε το σχήμα, μόνο για την τιμή 1 δεν έχει μηδενική τιμή ο πολ/σμος του (1) με το (2).

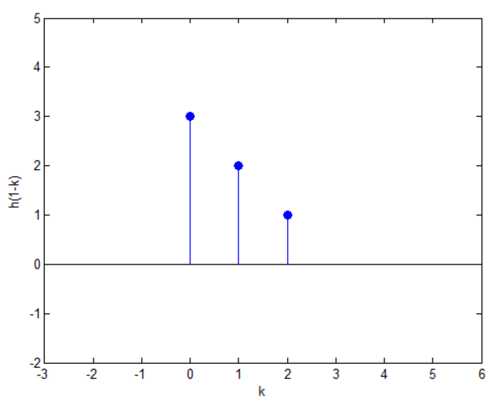


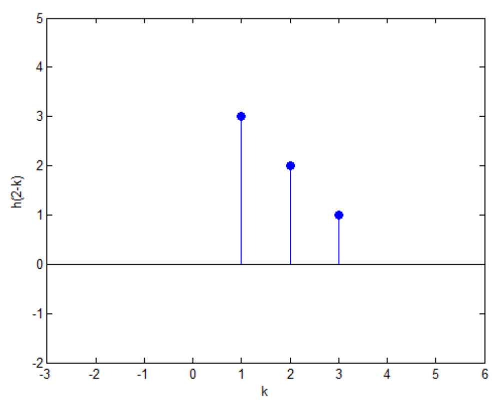
$$y(1) = x(1) * h(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) \Rightarrow \mathrm{y}(1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 2 + 1 = 3$$

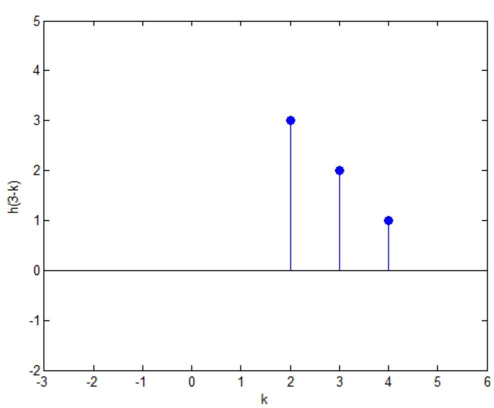
$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$$

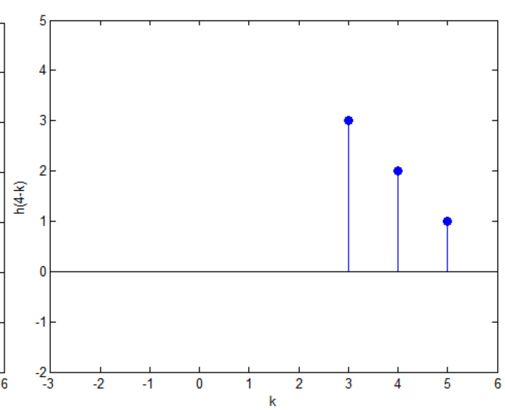
$$y(3) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(3-k) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5$$

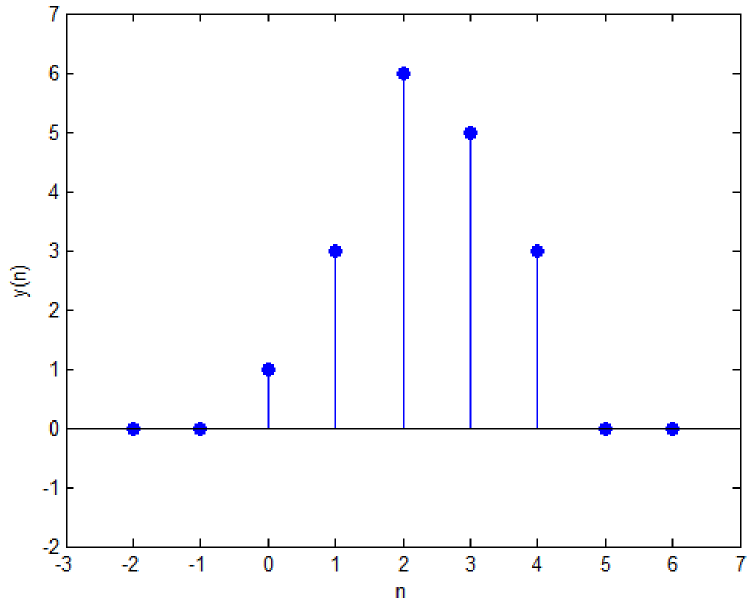
$$y(4) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(4-k) = 1 \cdot 3 = 3$$





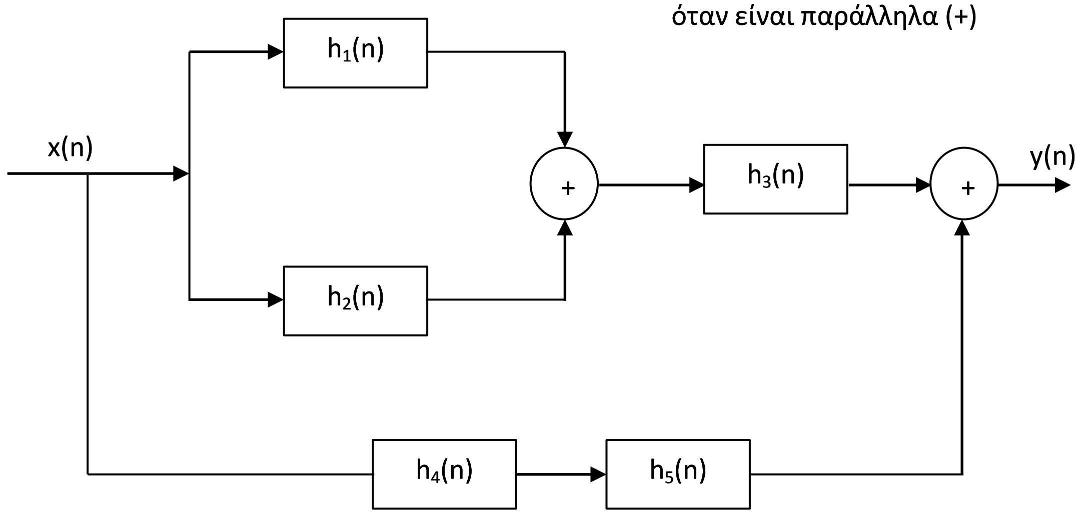






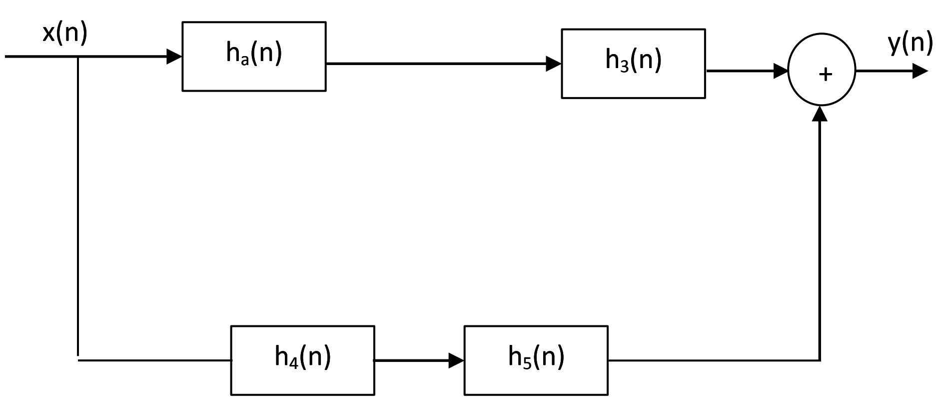
- <u>Αρχικό Σύστημα</u>

όταν είναι στη σειρά (*)
όταν είναι παράλληλα (+)



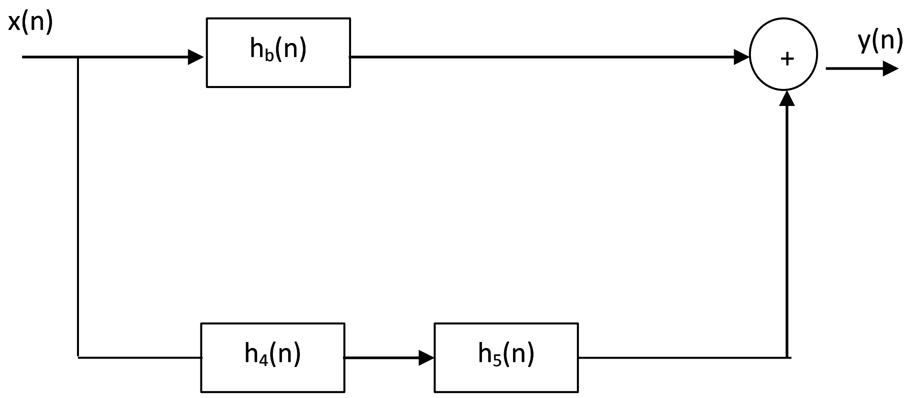
<u>Βήμα 1</u>

$$h_a(n) = h_1(n) + h_2(n)$$



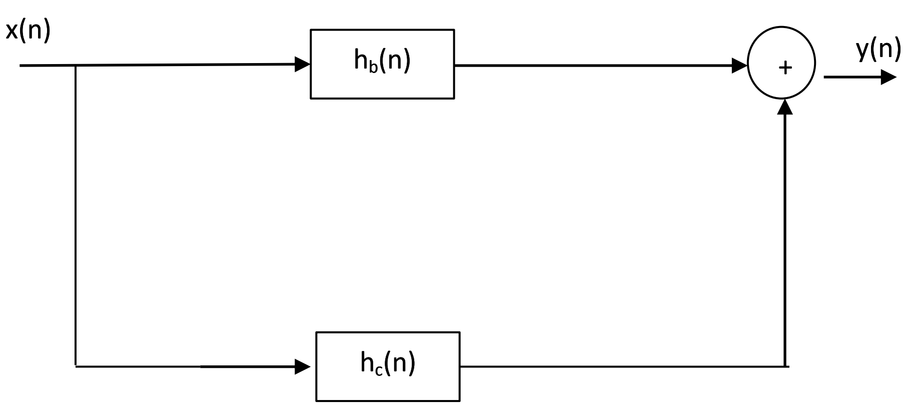
Βήμα 2

$$h_b(n) = h_a(n) * h_3(n) = (h_1(n) + h_2(n)) * h_3(n)$$



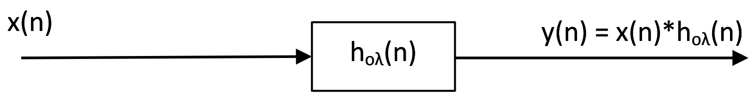
Βήμα 3

$$h_c(n) = h_4(n) * h_5(n)$$



Βήμα 4

$$h_{o\lambda}(n) = h_b(n) + h_c(n)$$



$$h_a(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

$$h_b(n) = h_a(n) * h_3(n)$$

$$h_c(n) = h_4(n) * h_5(n)$$

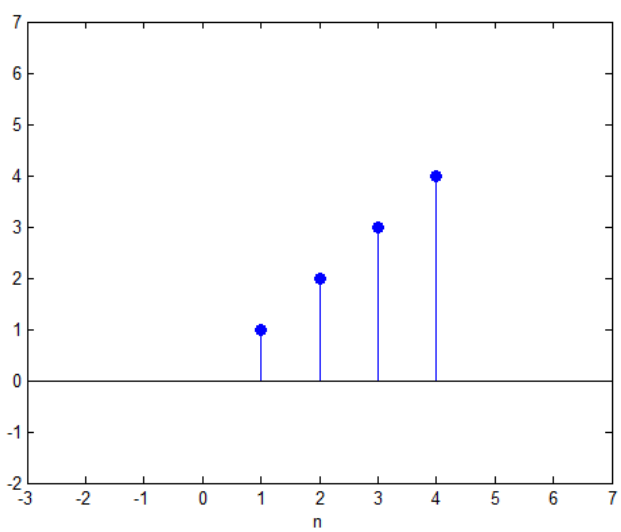
$$h_{o\lambda}(n) = h_b(n) + h_c(n) = h_a(n) * h_3(n) + h_4(n) * h_5(n) \Rightarrow$$
$$h_{o\lambda}(n) = [h_1(n) + h_2(n)] * h_3(n) + h_4(n) * h_5(n)$$

Εξίσωση Διαφορών

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(\mathrm{k}) \cdot \mathrm{x(n-k)} - \sum_{k=1}^{p} \mathrm{a(k)} \cdot y(\mathrm{n-k})$$

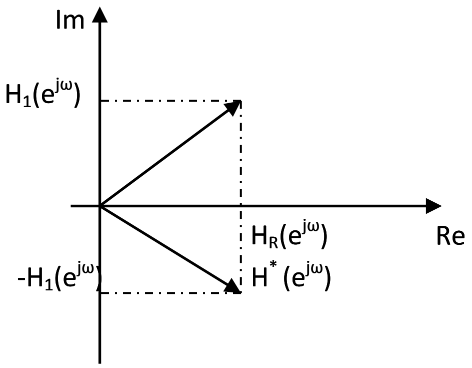
- αναδρομική αν a(k)≠0
- μη αναδρομική αν όλοι οι όροι a(k)=0

- $h(n) = a^n u(n)$



11^{o} ΜΑΘΗΜΑ

Re



$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right)$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega}) = H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})$$

$$H^*(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) - \mathrm{j}H_I(e^{j\omega})$$

- <u>Απόκριση Συχνότητας</u> → περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του h(n) = δ(n) + 6δ(n-1) + 3δ(n-2).

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\, e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(n) + 6\delta(n-1) + 3\delta(n-2)]\, e^{-jn\omega} \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)\, e^{-jn\omega} + 6\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-1)\, e^{-jn\omega} + 3\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-2)\, e^{-jn\omega} \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \delta(0)e^{-j0\omega} + 6\delta(1-1)e^{-j1\omega} + 3\delta(2-2)e^{-j2\omega} \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = 1 \cdot e^{0} + 6 \cdot 1 \cdot e^{-j\omega} + 3 \cdot 1 \cdot e^{-j2\omega} = 1 + 6e^{-j\omega} + 3e^{-j2\omega}$$

<u>Άσκηση</u>

$$h(n) = a^n u(n),\ |a| < 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\,e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n)\,e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n u(n)\,e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n)\,e^{-jn\omega} \Rightarrow$$
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (a\,e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

<u>Άσκηση</u>

$$h(n) = \delta(n) - a\delta(n-1)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\,e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(n) - a\delta(n-1))\,e^{-jn\omega} \Rightarrow$$
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)\,e^{-jn\omega} - a\sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-1)\,e^{-jn\omega} =$$
$$= \delta(0)e^{-j0\omega} - a\delta(1-1)e^{-j1\omega} = 1 - ae^{-j\omega} \Rightarrow$$
$$H(e^{j\omega}) \overset{Euler}{=} 1 - a(\cos(\omega) - j\sin(\omega)) = \underbrace{1 - a\cos(\omega)}_{\mathrm{Re}\{H(\mathrm{e}^{j\omega})\}} + \underbrace{ja\sin(\omega)}_{\mathrm{Im}\{H(\mathrm{e}^{j\omega})\}}$$

$$H_{\mathrm{Re}}(\mathrm{e}^{j\omega}) = 1 - \mathrm{a}\cos(\omega)$$
$$H_{\mathrm{Im}}(\mathrm{e}^{j\omega}) = \mathrm{a}\sin(\omega)$$

$$|H(\mathrm{e}^{j\omega})|^2 = H(\mathrm{e}^{j\omega}) \cdot H^*(\mathrm{e}^{j\omega}) = (H_{\mathrm{Re}}(\mathrm{e}^{j\omega}) + jH_{\mathrm{Im}}(\mathrm{e}^{j\omega})) \cdot (H_{\mathrm{Re}}(\mathrm{e}^{j\omega}) - jH_{\mathrm{Im}}(\mathrm{e}^{j\omega})) =$$
$$= (1 - \mathrm{a}\cos(\omega) + \mathrm{ja}\sin(\omega)) \cdot (1 - \mathrm{a}\cos(\omega) - \mathrm{ja}\sin(\omega)) \Rightarrow$$
$$|H(\mathrm{e}^{j\omega})|^2 = 1 - 2a\cos(\omega) + a^2 \rightarrow \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma$$

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{H_{\mathrm{Im}}(\mathrm{e}^{j\omega})}{H_{\mathrm{Re}}(\mathrm{e}^{j\omega})}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{a}\sin(\omega)}{1 - \mathrm{a}\cos(\omega)}\right) \rightarrow \varphi\acute{\alpha}\sigma\eta$$

<u>Άσκηση</u>

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \cdot u(n-2)$$

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \cdot u(n-2) \cdot e^{-jn\omega} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \cdot u(n-2) \cdot e^{-jn\omega} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \cdot u(n-2) \cdot e^{-jn\omega} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \cdot e^{-jn\omega} \underset{n=k+2}{\overset{k=n-2}{\Rightarrow}} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{(k+2)+2} \cdot e^{-j(k+2)\omega} \Rightarrow$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+4} \cdot e^{-j\omega(k+2)} \Rightarrow$$

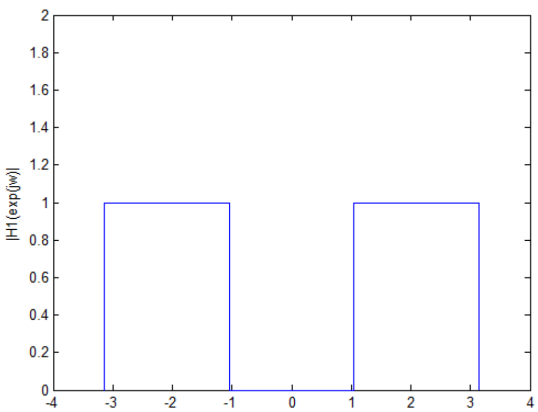
$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot e^{-j\omega 2} \cdot e^{-j\omega k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot e^{-j\omega 2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot e^{-j\omega k} = \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot e^{-j\omega 2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot e^{-j\omega k}\right)^{k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot e^{-j\omega 2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}}
\end{aligned}$$

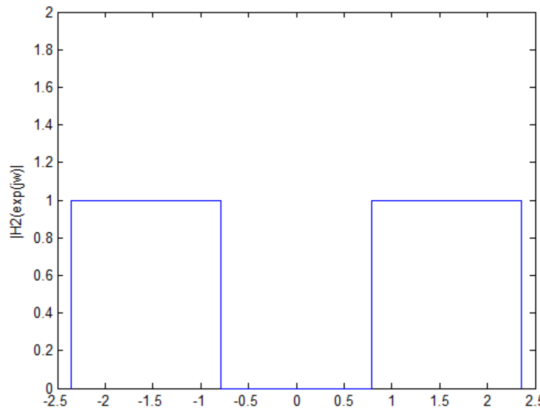
Κάθε σύστημα είναι και ένα φίλτρο!

- Ολοπερατό: $|H(e^{j\omega})| = c$
- Όταν περνάμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται πολλαπλασιασμός.

Άσκηση:

$$H_1(e^{j\omega}) : \text{Z.}\Delta\text{.}\ \pi/3 \le |\omega| \le \pi$$
$$H_2(e^{j\omega}) : \text{Z.}\Delta\text{.}\ \pi/4 \le |\omega| \le 3\pi/4$$

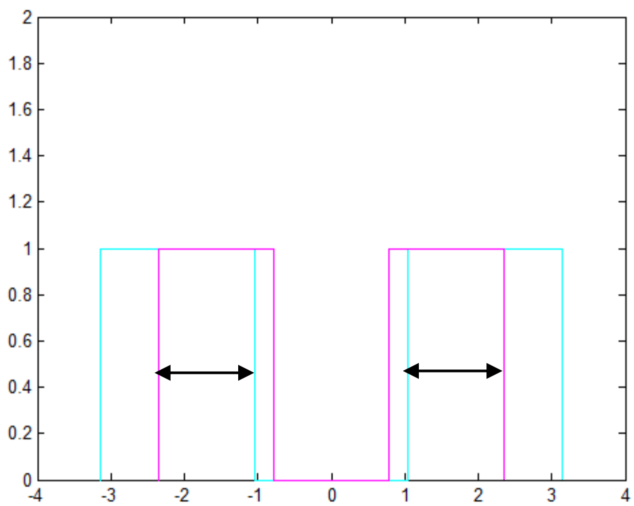




<u>Σε σειρά:</u>

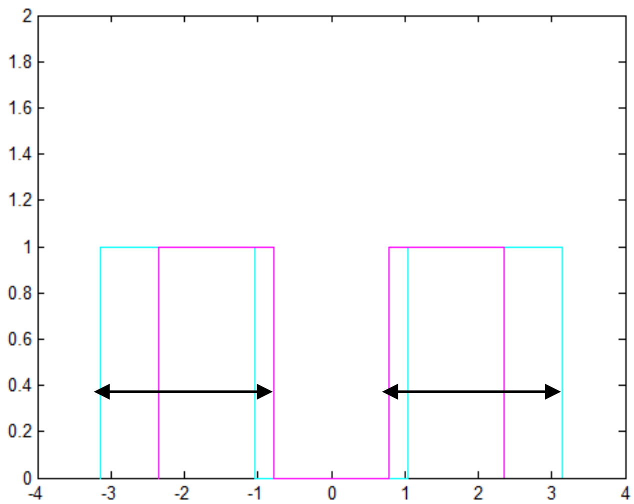
$$H_{\sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\alpha}}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$

$$\text{Z.Δ. } (\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi) \bigcap (\pi/4 \leq |\omega| \leq 3\pi/4)$$



<u>Παράλληλα:</u>

$$\text{Z.Δ. } (\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi) \bigcup (\pi/4 \leq |\omega| \leq 3\pi/4)$$

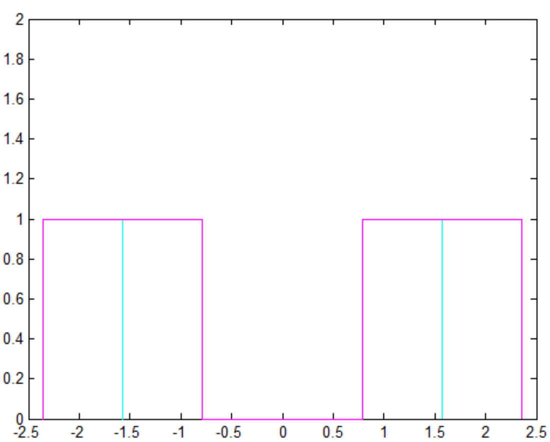


Άσκηση:

$$H_1(e^{j\omega}): \text{Z.Δ. } \pi/4 \le |\omega| \le 5\pi/8$$
$$H_2(e^{j\omega}): \text{Z.Δ. } 3\pi/8 \le |\omega| \le 3\pi/4$$

Σειρά:

$$H_\Sigma(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$$
$$\text{Z.Δ. } (3\pi/8 \le |\omega| \le 5\pi/8)$$



Παράλληλα:

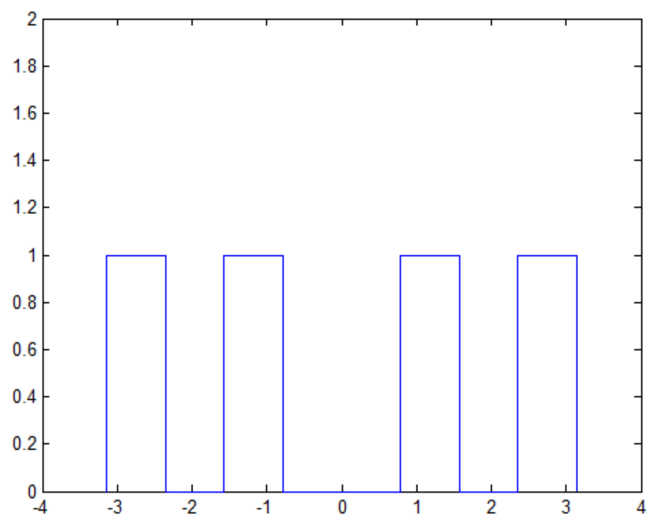
$H_{\Pi\alpha\rho}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$
$\text{Z.Δ.}\ (\pi/4 \le |\omega| \le 3\pi/4)$

Άσκηση:

$H_1(e^{j\omega}): \text{Z.Δ.}\ \pi/4 \le |\omega| \le \pi/2$
$H_2(e^{j\omega}): \text{Z.Δ.}\ 3\pi/4 \le |\omega| \le \pi$

Σειρά:

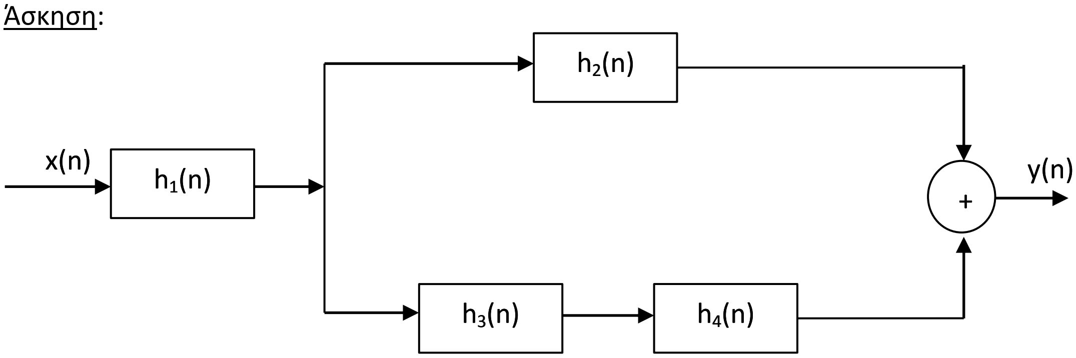
$H_\Sigma(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_2(e^{j\omega})$
$\text{Z.Δ.} \to 0$



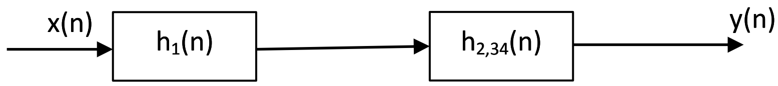
Παράλληλα:

$H_{\Pi\alpha\rho}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})$
$\text{Z.Δ.}\ (\pi/4 \le |\omega| \le \pi/2) \bigcup (3\pi/4 \le |\omega| \le \pi)$

Άσκηση:



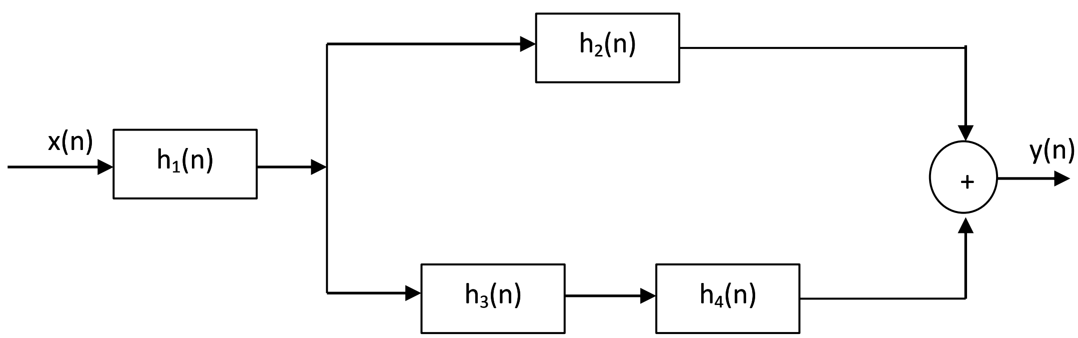
$$H_{34}(e^{j\omega}) = H_3(e^{j\omega}) \cdot H_4(e^{j\omega})$$



$$H_{2,34}(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega}) + H_{34}(e^{j\omega})$$

$$H_{o\lambda}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot H_{2,34}(e^{j\omega}) \Rightarrow$$
$$H_{o\lambda}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot [H_2(e^{j\omega}) + H_{34}(e^{j\omega})] \Rightarrow$$
$$H_{o\lambda}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot [H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega}) \cdot H_4(e^{j\omega})]$$

12^{o} ΜΑΘΗΜΑ



$$h_1(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-4)$$
$$h_2(n) = h_3(n) = (0\cdot 2)^n \cdot u(n)$$
$$h_4(n) = \delta(\mathrm{n}-2)$$

$$\triangleright H_{o\lambda}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot \left[H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega}) \cdot H_4(e^{j\omega}) \right]$$

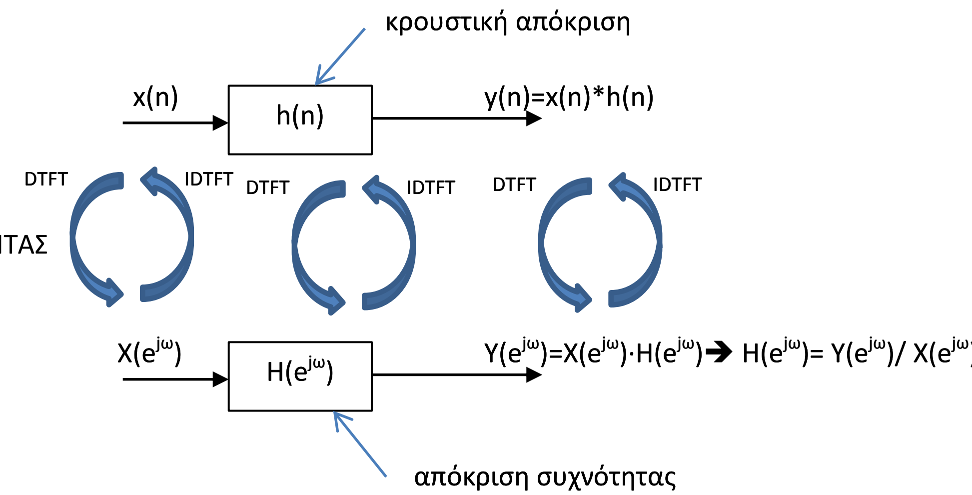
$$□ H_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-4)) e^{-jn\omega} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-jn\omega} + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-2) e^{-jn\omega} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-4) e^{-jn\omega} \Rightarrow$$
$$H_1(e^{j\omega}) = \delta(0) e^{-j0\omega} + 2\delta(2-2) e^{-j2\omega} + \delta(4-4) e^{-j4\omega} \Rightarrow$$
$$H_1(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}$$

$$□ H_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_2(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0\cdot 2)^n \cdot u(n) e^{-jn\omega} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} (0\cdot 2)^n \cdot u(n) e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} (0\cdot 2)^n \cdot u(n) e^{-jn\omega} \Rightarrow$$
$$H_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot 2^n \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (0\cdot 2\, e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - 0\cdot 2e^{-j\omega}} = H_3(e^{j\omega})$$

$$□ H_4(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_4(n) e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-2) e^{-jn\omega} = e^{-j2\omega}$$

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΕΔΙΟ ΧΡΟΝΟΥ

ΣΥΝΕΧΕΣ ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ



Άσκηση:

$$x_1(n) = a^n \cdot u(n) \quad |a|<1$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \cdot u(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot u(n)e^{-jn\omega} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot u(n)e^{-jn\omega} \Rightarrow$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Άσκηση:

Από το πεδίο συχνότητας → στο πεδίο του χρόνου

$$X_1(e^{j\omega}) = \delta(\omega-\omega_0)$$

$$x_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(e^{j\omega}) \cdot e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0) \cdot e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{jn\omega_0}$$

Άσκηση:

$$X_2(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$x_2(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(e^{j\omega}) \cdot e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)) \cdot e^{jn\omega} d\omega \Rightarrow$$

$$x_2(n) = \frac{1}{2\pi}\pi\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0) \cdot e^{jn\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi}\pi\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega+\omega_0) \cdot e^{jn\omega} d\omega \Rightarrow$$

$$x_2(n) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0) \cdot e^{jn\omega} d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega+\omega_0) \cdot e^{jn\omega} d\omega \Rightarrow$$

$$x_2(n) = \frac{1}{2}e^{jn\omega_0} + \frac{1}{2}e^{jn(-\omega_0)}$$

Άσκηση:

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^{n}, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot u(n) + \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} \cdot u(-n) - \delta(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\omega}} - 1 = \ldots = \frac{\frac{15}{16}}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{j\omega}\right)}$$

Άσκηση:

$$x(n) = 0.7^{(n-2)} \cdot u(n-2)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-0.7e^{-j\omega}} \cdot e^{-j2\omega}$$

$$x(n-n_0) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} e^{-jn_0\omega} \cdot X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a|<1$$

Άσκηση:

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n+3)$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,e^{-jn\omega}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n+3)\,e^{-jn\omega}\Rightarrow$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{-4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n+3)\,e^{-jn\omega}+\sum_{n=-3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot u(n+3)\,e^{-jn\omega}=$$

$$=\sum_{n=-3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-jn\omega}\Rightarrow$$

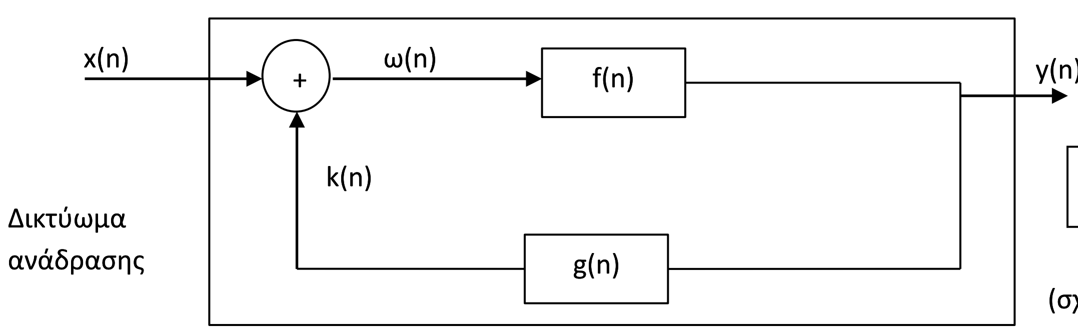
$$X(e^{j\omega})=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}e^{-j(-3)\omega}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}e^{-j(-2)\omega}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}e^{-j(-1)\omega}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega}\right)^{n}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}e^{3j\omega}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}e^{2j\omega}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}e^{j\omega}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$\sum_{i=-3}^{\infty}=a_{-3}+a_{-2}+a_{-1}+\sum_{i=0}^{\infty}a_i$$

$$\sum_{i=2}^{\infty}=\sum_{i=0}^{\infty}a_i-(a_0+a_1)$$

13^{o} ΜΑΘΗΜΑ

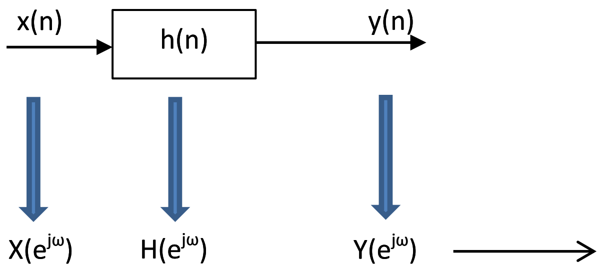


Δεν είναι παράλληλα!

(σχήμα α)

Όταν προκύψει το y(n) θα μπει σαν είσοδο στο g(n), στη συνέχεια θα προστεθεί με το x(n) και μπαίνουν στο f(n)

- <u>Απόκριση συστήματος στο δίκτυο ανάδρασης</u>



$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

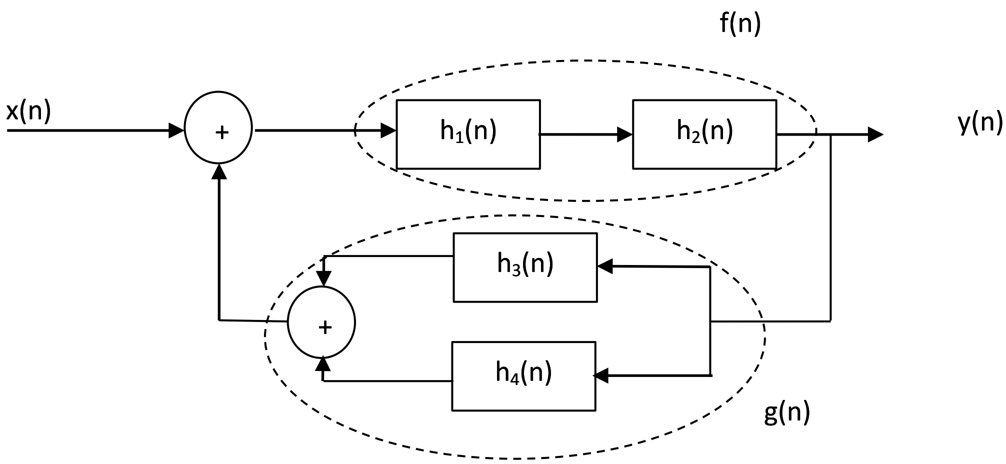
$$(1)\ \ y(n) = \omega(n) * f(n)$$
$$(2)\ \ \omega(n) = x(n) + k(n)$$
$$(3)\ \ k(n) = y(n) * g(n)$$

$$(2),(3) \rightarrow \omega(n) = x(n) + y(n) * g(n) \ \ (4)$$

από το σχήμα α: $(1),(4) \rightarrow y(n) = (x(n) + y(n) * g(n)) * f(n) \Rightarrow$

$$y(n) = x(n) * f(n) + y(n) * g(n) * f(n) \overset{DTFT}{\Rightarrow}$$
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot F(e^{j\omega}) + Y(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega}) \cdot F(e^{j\omega}) \Rightarrow$$
$$Y(e^{j\omega}) - Y(e^{j\omega}) \cdot G(e^{j\omega}) \cdot F(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot F(e^{j\omega}) \Rightarrow$$
$$Y(e^{j\omega})(1 - G(e^{j\omega}) \cdot F(e^{j\omega})) = X(e^{j\omega}) \cdot F(e^{j\omega}) \Rightarrow$$
$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{F(e^{j\omega})}{1 - G(e^{j\omega}) \cdot F(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})$$

<u>Άσκηση:</u>



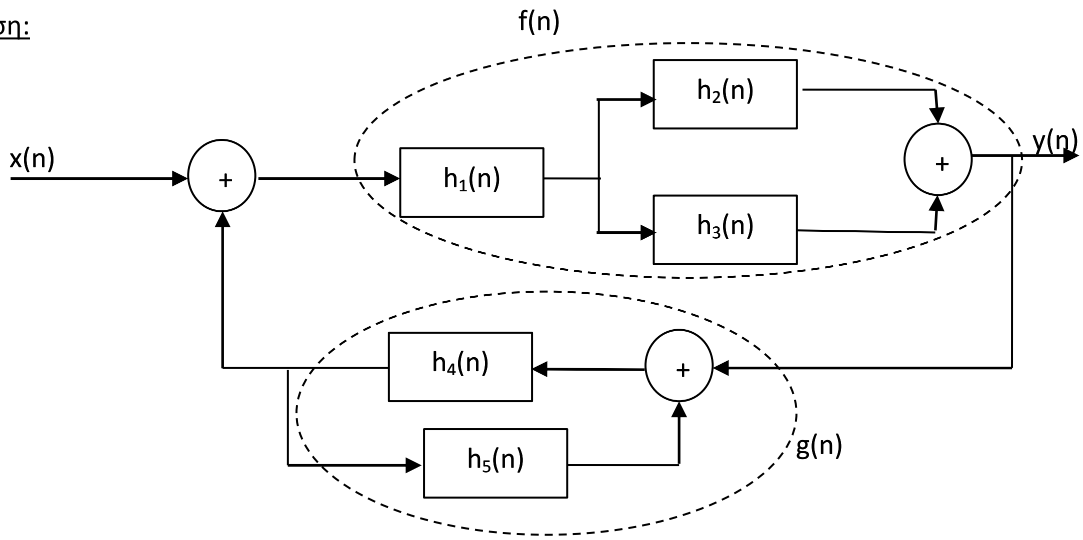
σύμφωνα με το προηγούμενο:

$$H(e^{j\omega})=\frac{H_1(e^{j\omega})\cdot H_2(e^{j\omega})}{1-\left(H_3(e^{j\omega})+H_4(e^{j\omega})\right)\cdot H_1(e^{j\omega})\cdot H_2(e^{j\omega})}$$

$$f(n)=h_1(n)*h_2(n)\xrightarrow{DTFT}F(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})\cdot H_2(e^{j\omega})$$

$$\mathrm{g}(n)=h_3(n)+h_4(n)\xrightarrow{DTFT}G(e^{j\omega})=H_3(e^{j\omega})+H_4(e^{j\omega})$$

Άσκηση:



$$f(n)=h_1(n)*(h_2(n)+h_3(n))\xrightarrow{DTFT}F(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})\cdot(H_2(e^{j\omega})+H_3(e^{j\omega}))$$

$$\mathrm{g}(n)\rightarrow G(e^{j\omega})=\frac{H_4(e^{j\omega})}{1-H_4(e^{j\omega})\cdot H_5(e^{j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{\mathrm{F}(e^{j\omega})}{1-G(e^{j\omega})\cdot F(e^{j\omega})}=\frac{H_1(e^{j\omega})\cdot(H_2(e^{j\omega})+H_3(e^{j\omega}))}{1-\frac{H_4(e^{j\omega})}{1-H_4(e^{j\omega})\cdot H_5(e^{j\omega})}\cdot H_1(e^{j\omega})\cdot(H_2(e^{j\omega})+H_3(e^{j\omega}))}$$

Άσκηση:

Γενική εξίσωση → Απόκριση Συχνότητας

$$y(n)=1.34y(n-1)-0.9y(n-2)+x(n)-1.41x(n-1)+x(n-2)$$

$$\Big\downarrow \text{DTFT}$$

$$Y(e^{j\omega})=1.34e^{-j(1)\omega}Y(e^{j\omega})-0.9e^{-j(2)\omega}Y(e^{j\omega})+X(e^{j\omega})-1.41e^{-j(1)\omega}X(e^{j\omega})+e^{-j(2)\omega}X(e^{j\omega})\Rightarrow$$
$$Y(e^{j\omega})-1.34e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+0.9e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})-1.41e^{-j\omega}X(e^{j\omega})+e^{-j2\omega}X(e^{j\omega})\Rightarrow$$
$$Y(e^{j\omega})(1-1.34e^{-j\omega}+0.9e^{-j2\omega})=X(e^{j\omega})(1-1.41e^{-j\omega}+e^{-j2\omega})\Rightarrow$$
$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1-1.41e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1-1.34e^{-j\omega}+0.9e^{-j2\omega}}=H(e^{j\omega})$$

Άσκηση:

Απόκριση Συχνότητας → Γενική εξίσωση

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{1-0.5e^{-j\omega}+e^{-3j\omega}}{1+0.5e^{-j\omega}+0.75e^{-2j\omega}}\Rightarrow$$
$$X(e^{j\omega})(1-0.5e^{-j\omega}+e^{-3j\omega})=Y(e^{j\omega})(1+0.5e^{-j\omega}+0.75e^{-2j\omega})\Rightarrow$$
$$X(e^{j\omega})-0.5e^{-j\omega}X(e^{j\omega})+e^{-3j\omega}X(e^{j\omega})=Y(e^{j\omega})+0.5e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+0.75e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega})\overset{IDTFT}{\Rightarrow}$$
$$x(n)-0.5x(n-1)+x(n-3)=y(n)+0.5y(n-1)+0.75y(n-2)\Rightarrow$$
$$y(n)=-0.5y(n-1)-0.75y(n-2)+x(n)-0.5x(n-1)+x(n-3)$$

Άσκηση:

$$y(n)-0.25y(n-1)=x(n)-x(n-2)$$
$$x(n)=\delta(n)\overset{DTFT}{\rightarrow}X(e^{j\omega})=1$$

Ποια είναι η είσοδος;

$$\Big\downarrow \text{DTFT}$$

$$Y(e^{j\omega})-0.25e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})-e^{-2j\omega}X(e^{j\omega})\Rightarrow$$
$$Y(e^{j\omega})-0.25e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})=1-e^{-2j\omega}\cdot 1\Rightarrow$$
$$Y(e^{j\omega})(1-0.25e^{-j\omega})=1-e^{-j2\omega}\Rightarrow$$
$$Y(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j2\omega}}{1-0.25e^{-j\omega}}=\frac{1}{1-0.25e^{-j\omega}}-\frac{e^{-j2\omega}}{1-0.25e^{-j\omega}}\overset{IDTFT}{\Rightarrow}$$
$$y(n)=0.25^{n}u(n)-0.25^{n-2}u(n-2)$$

<u>Άσκηση:</u>

κρουστική απόκριση του αντίστροφου συστήματος?

$$H(e^{j\omega})=\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Rightarrow$$
$$\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o\,\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha:$$
$$G(e^{j\omega})=\frac{1}{H(e^{j\omega})}=\frac{1}{\frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}}=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{1}{2}\frac{e^{-j\omega}}{1-4e^{-j\omega}}\Rightarrow$$
$$\overset{IDTFT}{\Rightarrow}g(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$$

14^{o} ΜΑΘΗΜΑ

<u>Άσκηση:</u>

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}}{1.1+\cos(\omega)}$$ Γενική εξίσωση?

Euler

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) \quad \text{(A)}$$

$$e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi) \underset{\sin(-\varphi)=-\sin(\varphi)}{\overset{\cos(-\varphi)=\cos(\varphi)}{\Rightarrow}} e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j\sin(\varphi) \quad \text{(B)}$$

$$\text{(A)}+\text{(B)} \Rightarrow e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) + \cos(\varphi) - j\sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{1}{2}e^{j\varphi} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}$$

$$\text{(A)}-\text{(B)} \Rightarrow e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) - \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j\sin(\varphi) \Rightarrow \sin(\varphi) = \frac{1}{2j}e^{j\varphi} - \frac{1}{2j}e^{-j\varphi}$$

$$\boxed{a^{\nu} \cdot a^{\mu} = a^{\nu+\mu}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{1.1+\cos(\omega)} \Rightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{e^{j\omega}}{1.1+\left(\frac{1}{2}e^{j\varphi} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) \cdot \left(1.1+\left(\frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\right) = X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.1Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = e^{j\omega}X(e^{j\omega}) \overset{\cdot e^{-j\omega}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{-j\omega}\left(1.1Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})\right) = e^{-j\omega}\left(e^{j\omega}X(e^{j\omega})\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.1e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{(-j\omega+j\omega)}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{(-j\omega-j\omega)}Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega+j\omega}X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.1e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{0}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{(-2j\omega)}Y(e^{j\omega}) = e^{0}X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.1e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{(-2j\omega)}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\overset{IDTFT}{\Rightarrow} 1.1y(n-1) + \frac{1}{2}y(n) + \frac{1}{2}y(n-2) = \mathrm{x(n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y(n) = -1.1y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + \mathrm{x(n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(n) = -2.2y(n-1) - y(n-2) + 2\,\mathrm{x(n)}$$

Άσκηση:

$$h(n)=a^n u(n),\ |a|<1$$
$$x(n)=b^n u(n),\ |b|<1$$
$$y(n)=h(n)*x(n)=?$$
$$\Big\downarrow^{DTFT}$$
$$Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\cdot X(e^{j\omega})$$

$$\left.\begin{aligned}X(e^{j\omega})&=\frac{1}{1-b\cdot e^{-j\omega}}\\ H(e^{j\omega})&=\frac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}\end{aligned}\right\}\to Y(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\cdot X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-a\cdot e^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-b\cdot e^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-a\cdot e^{-j\omega})\cdot(1-b\cdot e^{-j\omega})}=$$

$$\frac{A}{1-a\cdot e^{-j\omega}}+\frac{B}{1-b\cdot e^{-j\omega}}=\frac{A(1-b\cdot e^{-j\omega})}{1-a\cdot e^{-j\omega}}+\frac{B(1-a\cdot e^{-j\omega})}{1-b\cdot e^{-j\omega}}=\frac{A-Ab\cdot e^{-j\omega}+B-Ba\cdot e^{-j\omega}}{(1-a\cdot e^{-j\omega})\cdot(1-b\cdot e^{-j\omega})}$$

$\theta\alpha\ \pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota$

$$A+B-(Ab+Ba)\cdot e^{-j\omega}=1\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=1\\ Ab+Ba&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}B&=1-A\\ Ab+(1-A)a&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}B&=1-A\\ Ab+a-Aa&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}B&=1-A\\ A(b-a)&=-a\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}B&=1-A\\ A&=-\frac{a}{b-a}\end{aligned}\right\}\Rightarrow B=1-A=1-\left(-\frac{a}{b-a}\right)=\frac{b-a}{b-a}+\frac{a}{b-a}=\frac{b}{b-a}=B$$

$\acute{\alpha}\rho\alpha$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{-\frac{a}{b-a}}{1-a\cdot e^{-j\omega}}+\frac{\frac{b}{b-a}}{1-b\cdot e^{-j\omega}}\overset{IDTFT}{\Rightarrow}y(n)=-\frac{a}{b-a}a^n u(n)+\frac{b}{b-a}b^n u(n)$$

Άσκηση:

$$y(n)=0.5y(n-1)+bx(n)$$

Να βρεθεί η τιμή του b που για συχνότητα 0 το μέτρο της απόκρισης είναι 1.

$$|H(e^{j\omega})| = 1\Big|_{w=0}$$

$$\overset{IDTFT}{\Rightarrow} Y(e^{j\omega}) = 0.5e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + bX(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$Y(e^{j\omega})(1-0.5e^{-j\omega}) = bX(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

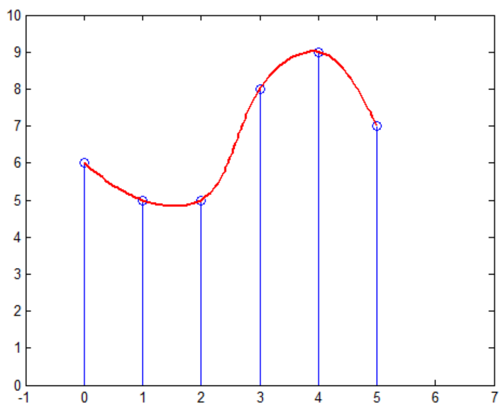
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{b}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{b^2}{(1-0.5e^{-j\omega})(1-0.5e^{j\omega})} = \ldots = \frac{b^2}{1.25-\cos(\omega)} \Rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{1.25-\cos(\omega)} = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{1.25-1} = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{0.25} = 1 \Rightarrow$$

$$b^2 = 0.25 \Rightarrow b = \pm 0.5$$

Δειγματοληψία



$$S_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)$$

$$\mathrm{F}_s = \frac{1}{T_s}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Άσκηση:

$$s(t)=\cos(2\pi 200\sqrt{2}t)$$
$$f_s=1000Hz$$

$$s(t)=\cos(\Omega t)$$
$$\Omega=2\pi 200\sqrt{2}=2\pi f \Rightarrow f=200\sqrt{2}=282.84Hz$$
$$f_s>2f \rightarrow \textit{ισχύει το θεώρημα του Nyquist άρα δεν θα υπάρξει φασματική παραμόρφωση}$$

Άσκηση:

ΣΕΛΙΔΑ 60

15^{o} ΜΑΘΗΜΑ

- **Μετασχηματισμός Z**

Υπερσύνολο του μετασχηματισμού Fourier στο διακριτό χρόνο

$$x(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \quad (1), \quad z=re^{j\omega}$$
$$(1)\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(re^{j\omega})^{-n} \overset{\gamma\iota\alpha\, r=1}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{(z-z)(z-3+2j)}{(z+1)(z-1+4j)}$$

μηδενικά: ρίζες B(z)
πόλοι: ρίζες A(z)

$$\mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\alpha}: z-2=0\Rightarrow z=2$$
$$z-3+2j=0\Rightarrow z=3-2j$$

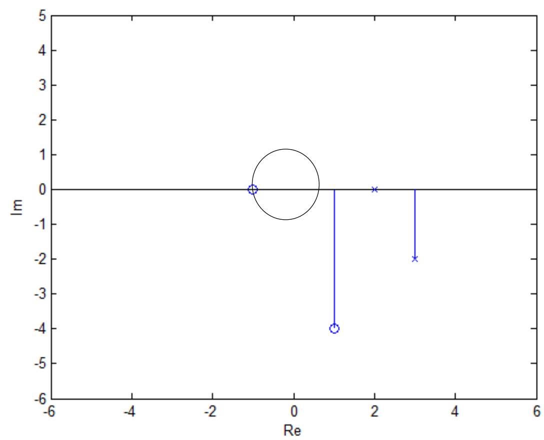
$$\pi\acute{o}\lambda o\iota: z+1=0\Rightarrow z=-1$$
$$z-1+4j=0\Rightarrow z=1-4j$$

Μηδενικά 0

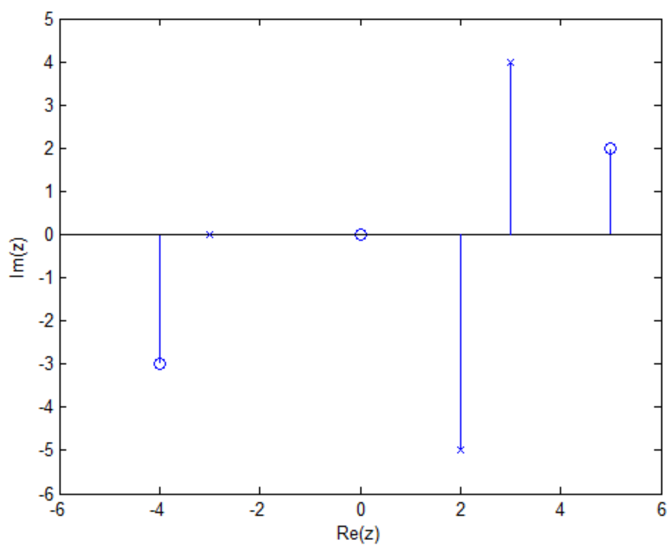
- Για z=2 ➔ B(2)=0 ➔ x(2)=0/A(z)=0
- Για z=3-2j ➔ B(3-2j)=0 ➔ x(3-2j)=0/A(z)=0

Πόλοι x

- Για z=-1 ➔ A(-1)=0 ➔ x(-1)=B(z)/0=∞
- Για z=1-4j ➔ A(1-4j)=0 ➔ x(1-4j)=B(z)/0=∞



<u>Άσκηση:</u>



$$x(z) = c\,\frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}{(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)(z - z_7)} \Rightarrow$$

$Μηδενικά$	$Πόλοι$
$z_1 = -4 - 3j$	$z_4 = -3$
$z_2 = 0$	$z_5 = 2 - 5j$
$z_3 = 5 + 2j$	$z_6 = 3 + 4j$
	$z_7 = 5$

$$\Rightarrow \frac{(z + 4 + 3j)\,z(z - 5 - 2j)}{(z - 3)(z - 2 + 5j)(z - 3 - 4j)(z - 5)}$$

<u>Άσκηση:</u>

$$x(z) = \frac{z + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - 3z^{-4} + z^{-5}}$$

Δίνεται ο μετασχηματισμός z. Η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάναι το μοναδιαίο κύκλο → άρα ορίζεται ο Fourier

$\left.\begin{array}{l} ω=π \\ ω=0 \end{array}\right\}$ → DTFT=?

$$z = re^{j\omega}\Big|_{r=1} \Rightarrow z = 1 \cdot e^{j\omega} = e^{j\omega}$$

$$X(e^{j\omega}) = x(z)\Big|_{r=1} = \frac{e^{j\omega} + 2(e^{j\omega})^{-2} + (e^{j\omega})^{-3}}{1 - 3(e^{j\omega})^{-4} + (e^{j\omega})^{-5}} \Rightarrow$$

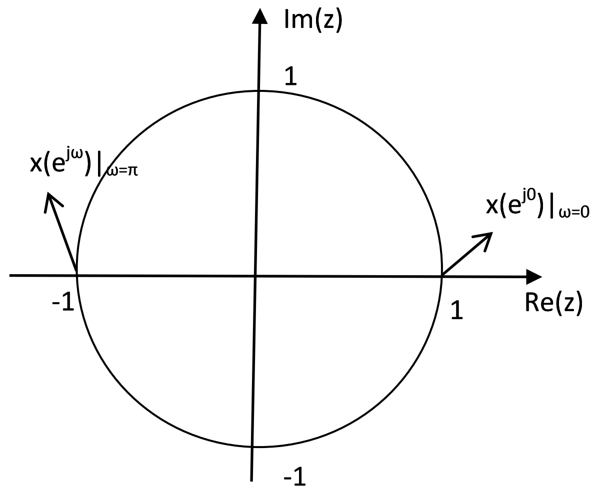
$$\overset{\gamma\iota\alpha\ \omega=\pi}{\Rightarrow} e^{j\pi} = \cos(\pi) + j\sin(\pi) = 1 + j0 = 1$$

$$X(e^{j\pi}) = \frac{(-1) + 2(-1)^{-2} + (-1)^{-3}}{1 - 3(-1)^{-4} + (-1)^{-5}} = \frac{(-1) + 2\dfrac{1}{(-1)^{-2}} + \dfrac{1}{(-1)^{-3}}}{1 - 3\dfrac{1}{(-1)^{-4}} + \dfrac{1}{(-1)^{-5}}} =$$

$$= \frac{(-1) + 2 \cdot 1 + (-1)}{1 - 3 \cdot 1 + (-1)} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\gamma\iota\alpha\ \omega = 0 \Rightarrow e^{j0} = \cos(0) + j\sin(0) = 1 + j0 = 1$$

$$X(e^{j\pi}) = \frac{1 + 2 \cdot 1 + 1}{1 - 3 \cdot 1 + 1} = \frac{4}{-1} = -4$$



<u>Άσκηση:</u>

$$x(z) = a^n u(n)$$

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n u(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n) z^{-n} \Rightarrow$$

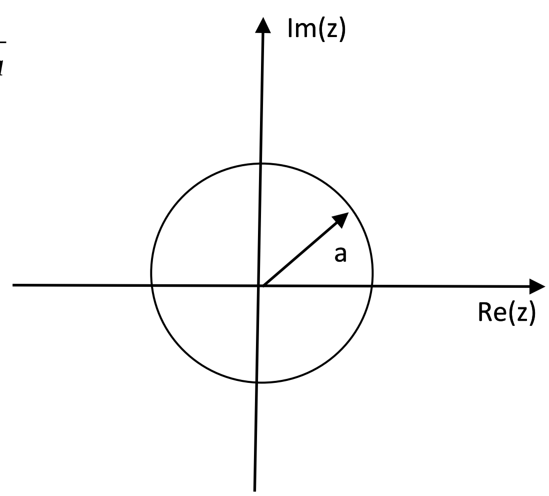
$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \Rightarrow$$

$$\left[|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |a| \cdot |z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Rightarrow |a| < |z| \right]$$

$$\Rightarrow x(z) = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{\frac{z}{z}-\frac{a}{z}} = \frac{1}{\frac{z-a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

Μηδενικό ➔ z=0

Πόλος ➔ z=a



Άσκηση:

$$x(n) = -a^n u(-n-1)$$

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} =$$

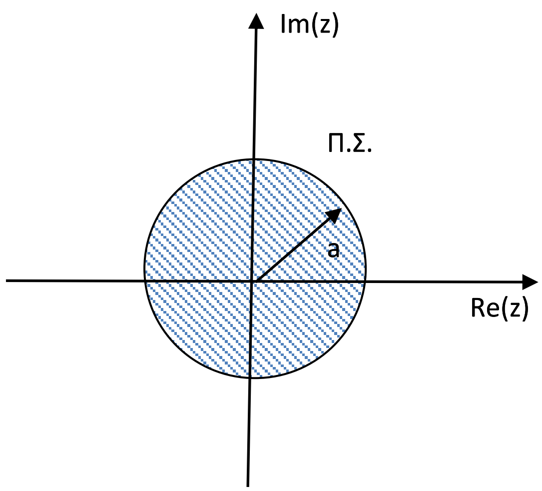
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n u(-n-1) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} -a^n u(-n-1) z^{-n} \Rightarrow$$

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(az^{-1}\right)^n \overset{k=-n-1}{\underset{n=-k-1}{=}} -\sum_{-k-1=-\infty}^{k=0} \left(az^{-1}\right)^{-k-1} =$$

$$= -\sum_{k=\infty}^{k=0} \left(az^{-1}\right)^{-k-1} = -\sum_{k=0}^{k=\infty} \left(az^{-1}\right)^{-k-1} = -\sum_{k=0}^{k=\infty} \left(az^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(az^{-1}\right)^{-k} =$$

$$= -\left(az^{-1}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{1}{az}\right)^k = -\left(az^{-1}\right)^{-1} \frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{az^{-1}}\right)}$$

$$\left[\left|\frac{1}{az^{-1}}\right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|az^{-1}|} < 1 \Rightarrow 1 < |az^{-1}| \Rightarrow 1 < \frac{|a|}{|z|} \Rightarrow |z| < |a| \right]$$



16^{o} ΜΑΘΗΜΑ

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \overset{k=-n}{\underset{n=-k}{=}} \sum_{-k=-\infty}^{-k=0} a^{-k} = \sum_{k=\infty}^{k=0} a^{-k} = \sum_{k=0}^{k=\infty} a^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k$
- $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} a^n \overset{k=-n-1}{\underset{n=-k-1}{=}} \sum_{-k-1=-\infty}^{-k-1=-1} a^{(-k-1)} = \sum_{-k=-\infty}^{k=0} a^{(-k-1)} = \sum_{k=\infty}^{k=0} a^{-(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{k+1}$

$k = -n + c$

$0 = 1 + c$

$-1 = c$

Αλλαγή ορίου ώστε να χτίσω το άθροισμα μου και να έρθω σε αυτή τη μορφή

$\sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}\ ,\ |b|<1$

Άσκηση:

$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2^n u(n-1)$

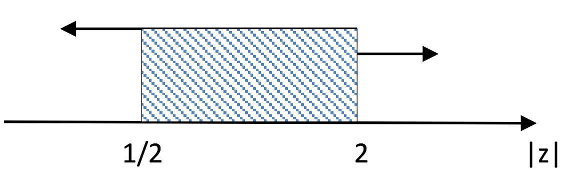
$x(n) = x_1(\mathrm{n}) - x_2(n)$

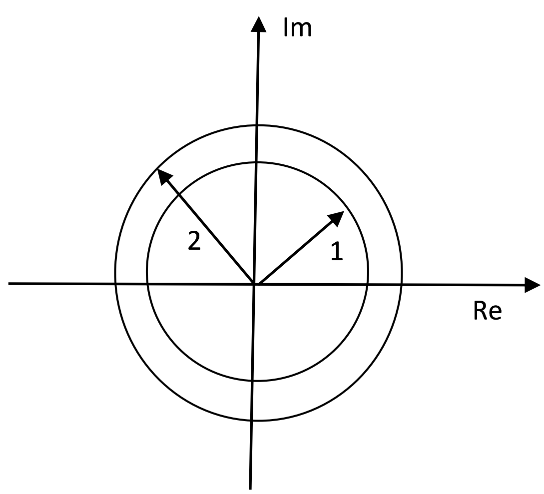
$x_1(n) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, Π.Σ.:$|\mathrm{z}|>1/2$

$x_2(n) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$, Π.Σ.:$|\mathrm{z}|<2$

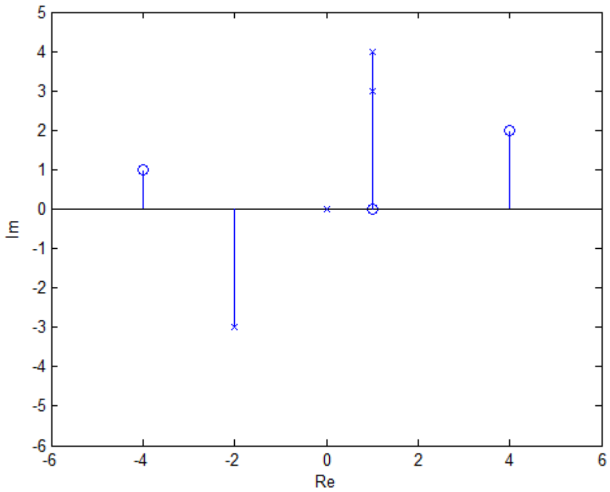
$x(n) = x_1(\mathrm{n}) - x_2(n) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}$

Π.Σ : $\frac{1}{2} < z < 2$





Άσκηση:



Μηδενικά:

z_1=-4+ζ

z_2=1

z_3=4+2ζ

Πόλοι:

z_4=-2-3ζ

z_5=0

z_6=1+3ζ

z_7=1+4ζ

Δεν μπορώ να έχω και μηδενικό και πόλο στο ίδιο σημείο γιατί αλληλοεξουδετερώνονται όταν τα βάλουμε στο κλάσμα.

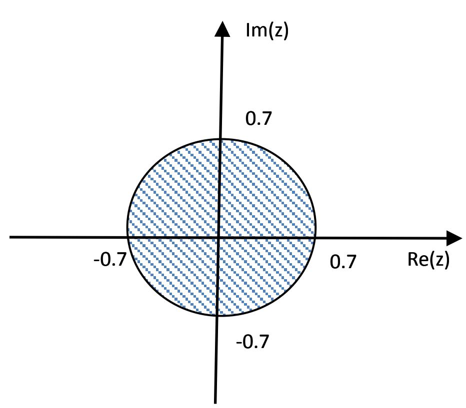
$$x(z) = c\frac{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}{(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)(z-z_7)}$$

$$x(z) = c\frac{(z+4-\zeta)(z-1)(z-4-2\zeta)}{(z+2+3\zeta)z(z-1-3\zeta)(z-1-4\zeta)}$$

Άσκηση:

$$x(z) = \frac{1}{1-0.7z^{-1}}$$

$$x(n) = -0.7^n u(n-1)$$



Άσκηση:

$$x(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2} - 4z^{-3}}{z^{-3} + z^{-4} - 3z^{-7}}$$

$$x(e^{j\omega}) = ?$$

$$\gamma\iota\alpha\ \omega = 0$$

$$\gamma\iota\alpha\ \omega = \pi$$

$$\gamma\iota\alpha\ \omega = 0$$

$$x(e^{j\omega}) = x(z)\,|_{z=1} = \frac{(1)^{-1} + 2(1)^{-2} - 4(1)^{-3}}{(1)^{-3} + (1)^{-4} - 3(1)^{-7}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z = re^{j\omega}\,|_{r=1} = e^{j\omega}\,|_{\omega=1} = e^{j0} = 1$$

αφού για ω=π βρίσκεται εκτός της περιοχής σύγκλισης, ο μετασχηματισμός Fourier δεν ορίζεται.

Άσκηση:

$$x(n) = 2^n u(n) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$x_1(\mathrm{z}) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \Pi.\Sigma.|\,\mathrm{z}\,| > 2$$

$$x_2(\mathrm{z}) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}\mathrm{z}^{-1}}, \Pi.\Sigma.|\,\mathrm{z}\,| > 1/2$$

$$x(\mathrm{z}) = x_1(\mathrm{z}) + x_2(\mathrm{z}) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Pi.\Sigma.|\,\mathrm{z}\,| > 2$$

Άσκηση:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$
$$e^{-j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) - j\sin(\omega_0 n)$$
$$e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n} = 2\cos(\omega_0 n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$x(n) = \cos(n\omega_0)u(n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]u(n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u(n)$$
$$x_1(n) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0})^n u(n) \xrightarrow{(z)} \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$$
$$x_2(n) = \frac{1}{2}(e^{-j\omega_0})^n u(n) \xrightarrow{(z)} \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

- Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Άσκηση:

$$x(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad \Pi.\Sigma.\ |z| > a$$
$$x(n)|_{n=0} = ?$$
$$\mathrm{x}(0) = \lim_{z\to\infty} x(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-az^{-1}} \Rightarrow x(0) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-\frac{a}{z}} = 1$$

17ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση:

$$x(\mathrm{z}) = \frac{2}{1-0.5z^{-1}} - \frac{3+3.22z^{-1}}{1-0.7z^{-1}}$$
$$x(n)|_{n=0} = x(0) = \lim_{z\to\infty} x(z) = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{2}{1-0.5z^{-1}} - \frac{3+3.22z^{-1}}{1-0.7z^{-1}}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(0) = \lim_{z\to\infty}\frac{2}{1-0.5z^{-1}} - \lim_{z\to\infty}\frac{3+3.22z^{-1}}{1-0.7z^{-1}} = \lim_{z\to\infty}\frac{2}{1-\frac{0.5}{z}} - \lim_{z\to\infty}\frac{3+\frac{3.22}{z}}{1-\frac{0.7}{z}} = \frac{2}{1} - \frac{3}{1} = 2-3 = -1$$

Άσκηση:

$$x(z)=\frac{2+3z^{-2}-5z^{-3}+2z^{-5}}{2z^{-1}-4z^{-3}+7z^{-7}}$$

$$DTFT$$

$$z=re^{j\omega}\overset{r=1}{=}e^{j\omega}$$

$$\omega=\pi\rightarrow z=e^{j\pi}=-1$$

$$\omega=0\rightarrow z=e^{j0}=1$$

- $x(e^{j\pi})=x(z)|_{z=-1}=\frac{2+3(-1)^{-2}-5(-1)^{-3}+2(-1)^{-5}}{2(-1)^{-1}-4(-1)^{-3}+7(-1)^{-7}}=\frac{2+3\cdot1-5\cdot(-1)+2\cdot(-1)}{2\cdot(-1)-4\cdot(-1)+7\cdot(-1)}=$

$$=\frac{2+3+5-2}{-2+4-7}=\frac{8}{-5}$$

- $x(e^{j0})=x(z)|_{z=1}=\frac{2+3(1)^{-2}-5(1)^{-3}+2(1)^{-5}}{2(1)^{-1}-4(1)^{-3}+7(1)^{-7}}=\frac{2+3\cdot1-5\cdot1+2\cdot1}{2\cdot1-4\cdot1+7\cdot1}=$

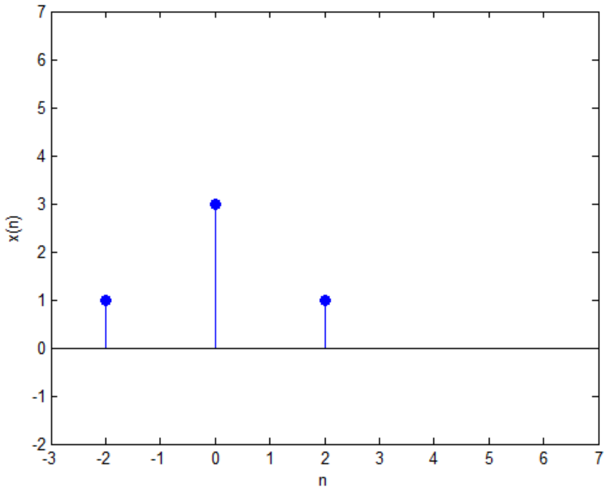
$$=\frac{2+3-5+2}{2-4+7}=\frac{2}{5}$$

Άσκηση:

$$x(n)=3\delta(n)+\delta(n-2)+\delta(n+2)$$
$$x(z)=?$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(n)=3\cdot1=3 \\ x_2(n)=z^{-2}\cdot1=z^{-2} \\ x_1(n)=z^{-(-2)}\cdot1=z^{2} \end{array}\right\} x(z)=3+z^{-2}+z^{2}$$

$$\Pi.\Sigma.\ 0<|z|<\infty$$



Αφού για n<0 δεν είναι παντού 0, τότε δεν συμπεριλαμβάνεται το ∞ και ομοίως αφού δεν είναι για n>0 πάντα 0, δεν συμπεριλαμβάνεται το 0.

Άσκηση:

$$x(n) = a^{|n|} = \begin{cases} a^n, \; n \geq 0 \\ a^{-n}, \; n < 0 \end{cases}$$

$$x(n) = a^n u(n) + a^{-n} u(-n) - \delta(n)$$

$$x_1(n) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \;\; \Pi.\Sigma. |z| > |a|$$

$$x_3(n) = 1 \qquad \Pi.\Sigma. 0 \leq |z| \leq \infty$$

$$x_2(n) = \frac{1}{1 - a(z^{-1})^{-1}} = \frac{1}{1 - az} \;\; \Pi.\Sigma. |z| > 1/|a|$$

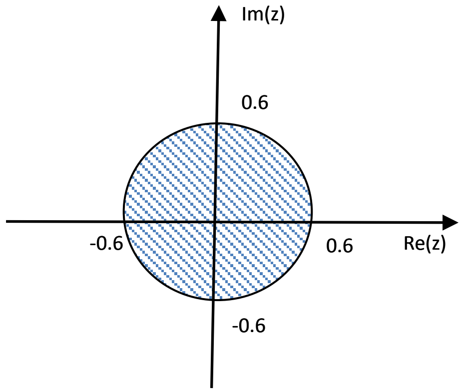
$$x(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - az} + 1$$

Άρα η περιοχή σύγκλισης θα είναι η τομή όλων.

Άσκηση:

$$x(z) = \frac{1}{1-0.6z^{-1}}$$

$$x(n) = ?$$



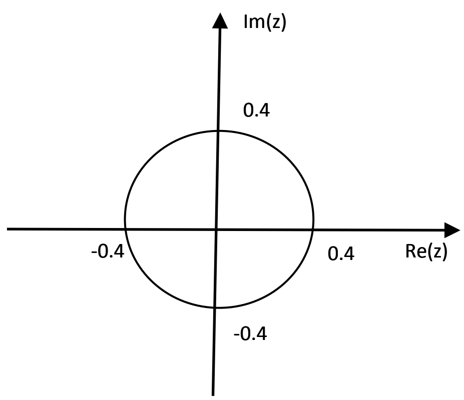
<u>Άσκηση:</u>

$$x(z) = \frac{2-3z^{-2}}{1-0.4z^{-1}} = \frac{2}{1-0.4z^{-1}} - 3\frac{z^{-2}}{1-0.4z^{-1}}$$

$$x_1(n) = 2(0.4^n u(n))$$

$$x_2(n) = 3(0.4^{(n-2)} u(n-2))$$

$$x(n) = 2(0.4^n u(n)) - 3(0.4^{(n-2)} u(n-2))$$



Άσκηση:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow{z} Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z) = X_1(z) \cdot 1 = X_1(z)$$

$$X_1(z)$$

$$x_2(n) = \delta(n) \rightarrow X_2(z) = 1$$

$$y(n) = ?$$

$$x(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + \ldots}{1 - az^{-1}} =$$

$$= \frac{a_0}{1 - az^{-1}} + \frac{a_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}} + \frac{a_2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} + \ldots$$

18ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση:

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$h(n) = \delta(n) - a\delta(n-1)$$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

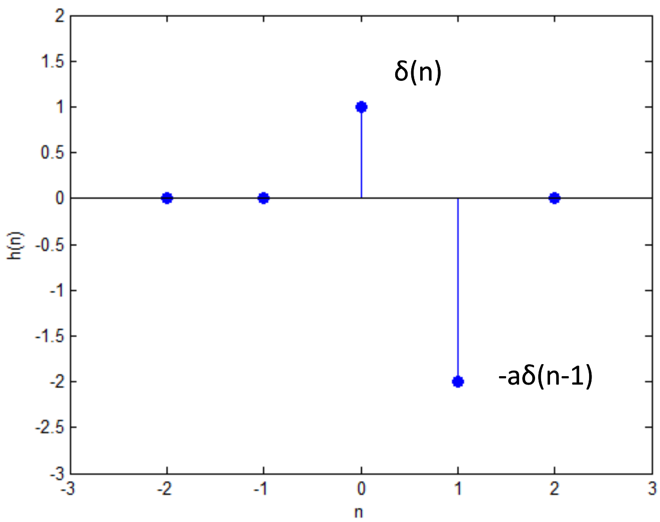
$$\mathrm{Y(z)} = ?$$

$$\mathrm{Y(z)} = \mathrm{X(z)} \cdot \mathrm{H(z)}$$

$$\mathrm{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \Pi.\Sigma.: |z| > a$$

$$H(\mathrm{z}) = 1 - az^{-1} \quad \Pi.\Sigma.: 0 < |z|$$

$$\mathrm{Y(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}(1 - az^{-1}) = 1 \quad \Pi.\Sigma.: |z|$$



Ο ένας μετασχηματισμός εξουδετέρωσε τον άλλον γι' αυτό η περιοχή σύγκλισης δεν είναι η τομή, αλλά μόνο της μοναδιαίας.

Άσκηση:

$$y(n) = 0.25y(n-2) + x(n) \quad (*)$$
$$x(n) = \delta(n-1)$$
$$y(-1) = y(-2) = 1 \longrightarrow$$ Αρχικές συνθήκες-στιγμές εκκίνησης
$$y(n) = ?$$

n	x(n)	y(n)
-2	0	1
-1	0	1
0	0	$y(0) = 0.25y(0-2) + x(0) = 0.25y(-2) + x(0) = 0.25 \cdot 1 + 0 = 0.25$
1	1	$y(1) = 0.25y(1-2) + x(1) = 0.25y(-1) + x(1) = 0.25 \cdot 1 + 1 = 1.25$
2	0	$y(2) = 0.25y(2-2) + x(2) = 0.25y(0) + x(2) = 0.25 \cdot 0.25 + 0 = 0.0625$
3	0	...
4	0	...

Μονόπλευρος Μετασχηματισμός z

$$(*) \xrightarrow{z}$$

$$\alpha\nu\ y(n) \xrightarrow{z_1} Y_1(z) \quad (1)$$

$$y(n-2) \xrightarrow{z_1} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2) z^{-n} \underset{n=k+2}{\overset{k=n-2}{=}} \sum_{k+2=0}^{\infty} y(k) z^{-(k+2)} = \sum_{k=-2}^{\infty} y(k) z^{-k} z^{-2} =$$

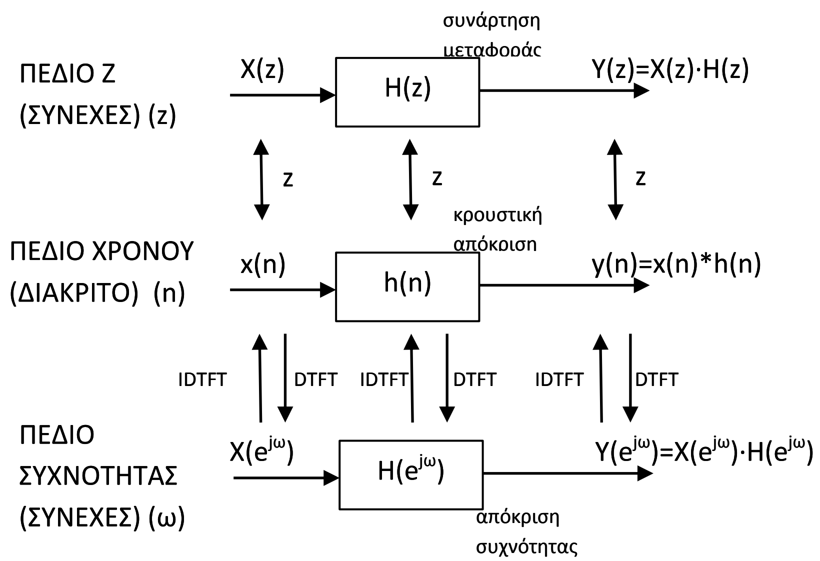
$$= z^{-2} \sum_{k=-2}^{\infty} y(k) z^{-k} = z^{-2} y(-2) z^{2} + z^{-2} y(-1) z^{1} + z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k}$$

$$\xrightarrow{(1)} z^{0} y(-2) + z^{-1} y(-1) + z^{-2} Y_1(z)$$

$$x_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n-1) z^{-n} = \delta(1-1) z^{-1} = \delta(0) z^{-1} = 1 \cdot z^{-1} = z^{-1}$$

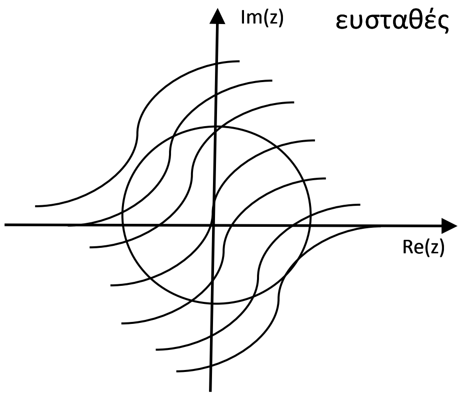
$$Y_1(z) = 0.25(z^{-2} Y_1(z) + z^{-1} y(-1) + y(-2)) + z^{-1} \Rightarrow$$
$$Y_1(z) = 0.25 z^{-2} Y_1(z) + 0.25 z^{-1} y(-1) + 0.25 y(-2) + z^{-1} \Rightarrow$$
$$Y_1(z) - 0.25 z^{-2} Y_1(z) = 0.25 z^{-1} \cdot 1 + 0.25 \cdot 1 + z^{-1} \Rightarrow$$
$$Y_1(z)(1 - 0.25 z^{-2}) = 0.25 z^{-1} + 0.25 + z^{-1} \Rightarrow$$
$$Y_1(z) = \frac{0.25 z^{-1} + 0.25 + z^{-1}}{1 - 0.25 z^{-2}} = \ldots = \frac{11/8}{1 - 1/2 z^{-1}} - \frac{9/8}{1 + 1/2 z^{-1}}$$
$$y(n) = \frac{11}{8} (1/2)^{n} u(n) - \frac{9}{8} (-1/2)^{n} u(n)$$

Ανάλυση Μετασχηματισμού Συστημάτων

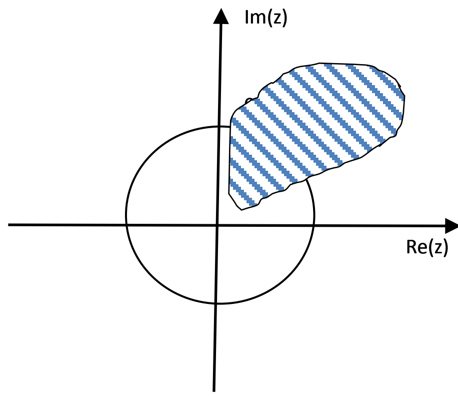


<u>Ευστάθεια</u>

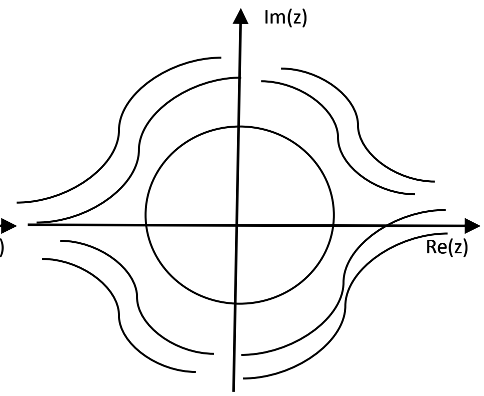
Αν μέσα στην περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος τότε το σύστημα είναι ευσταθές.



ευσταθές

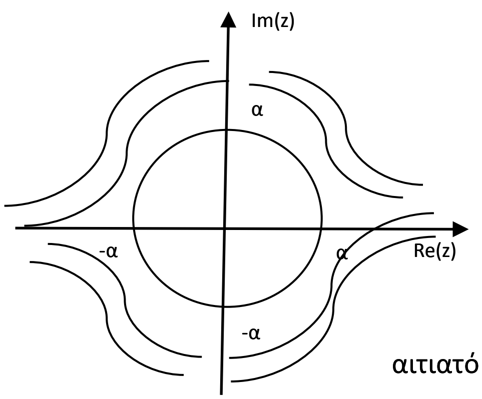


ασταθές

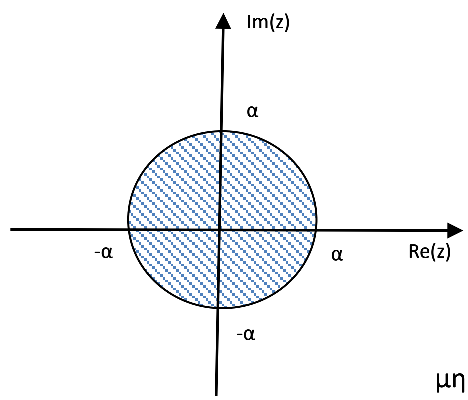


ασταθές

<u>Αιτιότητα</u>



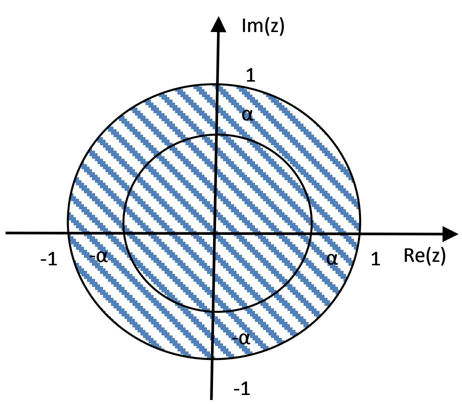
αιτιατό



μη αιτιατό

Π.Σ. στην εξωτερική επιφάνεια του κύκλου με r=a

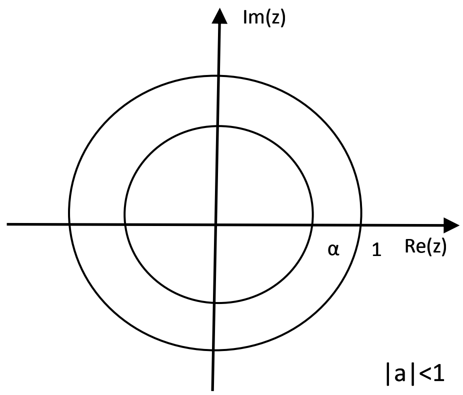
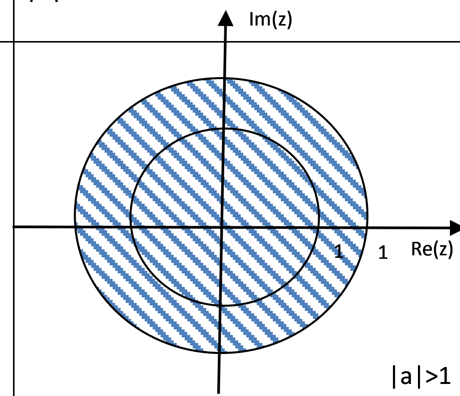
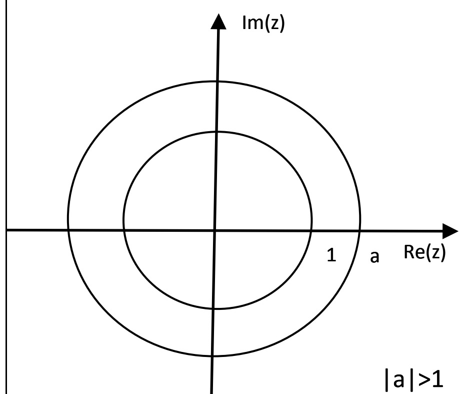
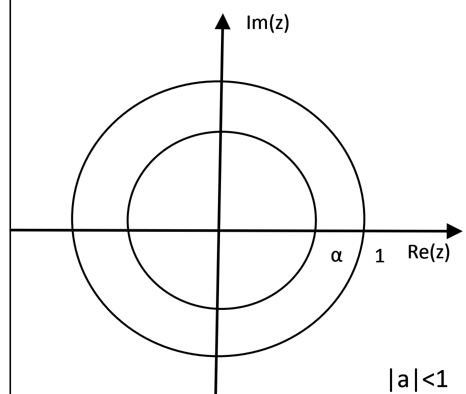
<u>Πραγματοποιήσιμο → ευσταθές + αιτιατό</u>



- αιτιατό
- ευστεθές

|z|>|a|

|a|<1

ΣΕΛΙΔΑ 74-ΣΧΗΜΑ ΚΑΤΩ	αιτιατό	μη-αιτιατό
Ευσταθές		
μη-ευσταθές		

19ο ΜΑΘΗΜΑ

<u>Άσκηση:</u>

πραγματοποιήσιμο → ευσταθές + αιτιατό

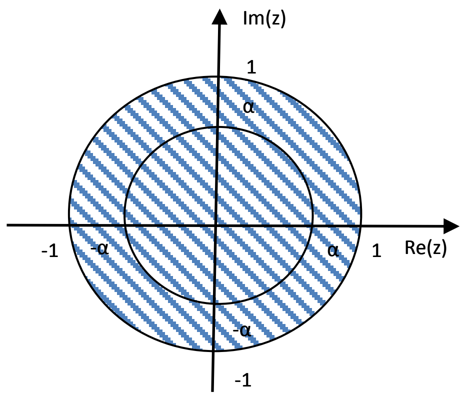
Π.Σ. $|z|>a$

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)(z - z_p)}$$

$$H(z_p) = \frac{A(z_p)}{B(z_p)(z_p - z_p)} = \frac{A(z_p)}{0} \to \infty$$

Πόλος: z_p

z≤a<1

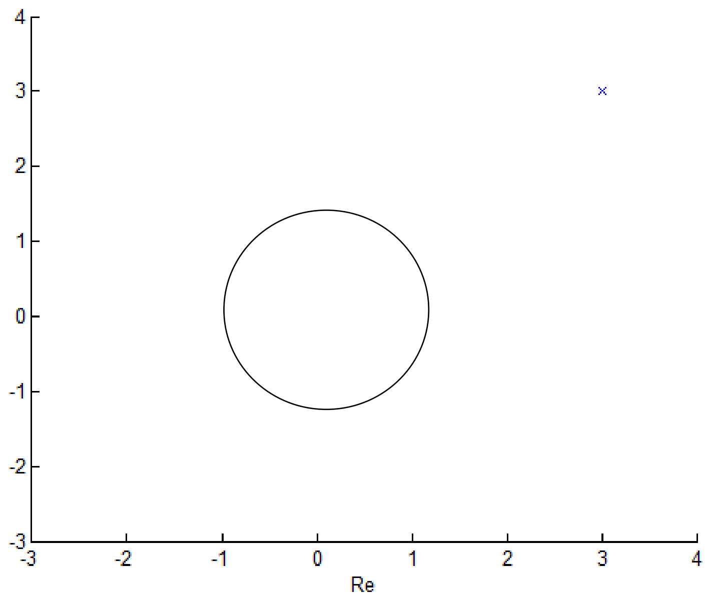


Σε μια συνάρτηση μεταφοράς οι πόλοι ΑΠΟΚΛΕΙΕΤΑΙ να βρίσκονται μέσα στο πεδίο σύγκλισης επειδή στ Π.Σ. έχει παντού τιμή. Δεν ∞ !!

Για ένα πραγματοποιήσιμο σύστημα οι πόλοι βρίσκονται εσωτερικά του μοναδιαίου κύκλου.

π.χ. H(z)

με πόλο 3+4j μπορεί να είναι πραγματοποιήσιμο?



Δεν μπορεί να είναι πραγματοποιήσιμο διότι ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό του σημείου.

- Πραγματοποιήσιμο = ευσταθές + αιτιατό
  - ευσταθές = Π.Σ. C μον. κύκλο
  - αιτιατό = Π.Σ. |z|<a ➔ Πόλοι στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου
  - πόλοι = $\notin$ Π.Σ.

<u>Άσκηση:</u>

$$H(z) = C\frac{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})} \ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau o\pi o\iota\acute{\eta}\sigma\iota\mu o$$

Να σχεδιαστούν στο μιγαδικό επίπεδο οι πόλοι και τα μηδενικά

<u>Μηδενικά:</u>

$$1-e^{-j\omega_0}z^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = e^{-j\omega_0}z^{-1} \Rightarrow 1 = \frac{e^{-j\omega_0}}{z} \Rightarrow z_{01} = e^{-j\omega_0}$$

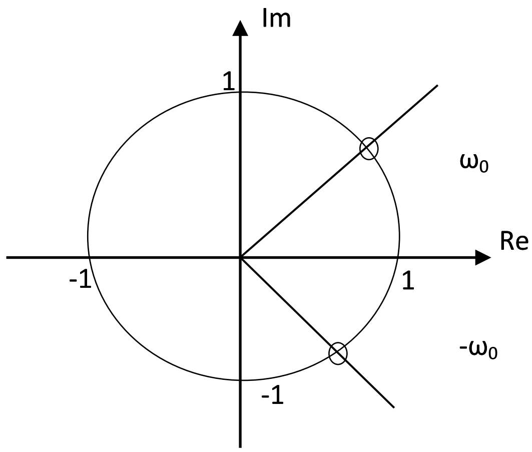
$$1-e^{j\omega_0}z^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = e^{j\omega_0}z^{-1} \Rightarrow 1 = \frac{e^{j\omega_0}}{z} \Rightarrow z_{02} = e^{j\omega_0} =$$

$$= \cos(\omega_0) + j\sin(\omega_0) \quad |z_{02}| = 1$$

Πόλοι:

$$1 - re^{j\omega_0} z^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = re^{j\omega_0} z^{-1} \Rightarrow 1 = \frac{re^{j\omega_0}}{z} \Rightarrow z_{03} = re^{j\omega_0}$$

$$1 - re^{-j\omega_0} z^{-1} = 0 \Rightarrow 1 = re^{-j\omega_0} z^{-1} \Rightarrow 1 = \frac{re^{-j\omega_0}}{z} \Rightarrow z_{04} = re^{-j\omega_0}$$



Αντίστροφα συστήματα

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

ΜΗΔ. ΡΙΖΕΣ Α

ΠΟΛΟΙ ΡΙΖΕΣ Β

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{\frac{A(z)}{B(z)}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

ΜΗΔ. ΡΙΖΕΣ Β

ΠΟΛΟΙ ΡΙΖΕΣ Α

Το πεδίο σύγκλισης του G(z) πρέπει να είναι επικαλυπτόμενο με το πεδίο σύγκλισης του H(z).

Άσκηση:

$$H(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \quad \Pi.\Sigma.>0.8$$

$$\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi o?\ \kappa\rho o\upsilon\sigma\tau\iota\kappa\acute{\eta}?$$

$$G(z)=\frac{1}{H(z)}\Rightarrow G(z)=\frac{1}{\frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}}\Rightarrow G(z)=\frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}-\frac{0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

$$g(n)=(0.5)^n u(n)-0.8(0.5)^{n-1}u(n-1) \quad \mu\varepsilon\,\Pi.\Sigma.|\,\mathrm{z}\,|>0.5$$

20ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση:

$$H(z)=\frac{0.5-z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \qquad \Pi.\Sigma.:|\,z\,|>0.8$$

αντίστροφο σύστημα?

$$G(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{1}{\frac{0.5-z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}}=\frac{1-0.8z^{-1}}{0.5-z^{-1}}\overset{(\times 2)}{=}\frac{2-1.6z^{-1}}{1-2z^{-1}}=\frac{2}{1-2z^{-1}}-\frac{1.6z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$G(z)=2\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)-1.6\left(\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right)$$

$$\Pi.\Sigma.:\begin{cases}|\,z\,|>2\\ |\,z\,|<2\end{cases}$$

1η περίπτωση

$$|\,z\,|>2: \qquad g(n)=2(2^n u(n))-1.6(2^{n-1}u(n-1))\Rightarrow$$

$$\alpha\sigma\tau\alpha\theta\acute{\varepsilon}\varsigma+\alpha\iota\tau\iota\alpha\tau\acute{o} \qquad g(n)=2^{n+1}u(n)-1.6\cdot 2^{n-1}u(n-1)$$

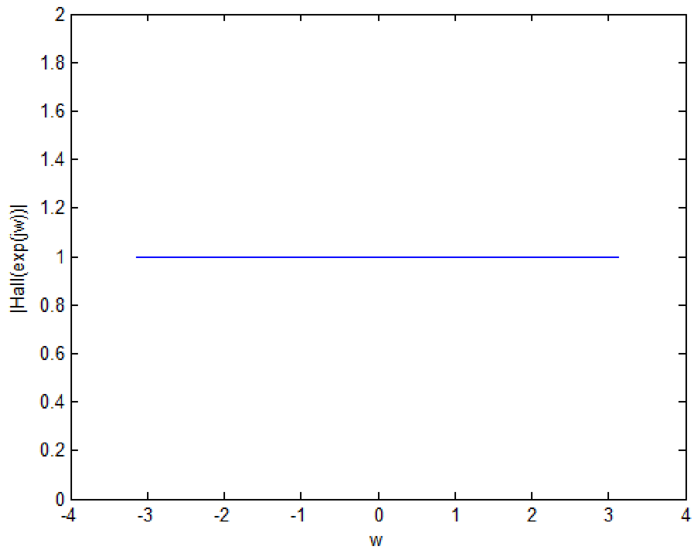
2η περίπτωση

$$|\,z\,|<2: \qquad g(n)=2(-2^n u(-n-1))-1.6(-2^{n-1}u(-(n-1)-1))\Rightarrow$$

$$\alpha\sigma\tau\alpha\theta\acute{\varepsilon}\varsigma+\mu\eta\,\alpha\iota\tau\iota\alpha\tau\acute{o} \qquad g(n)=-2^{n+1}u(-n-1)-1.6\cdot 2^{n-1}u(-n)$$

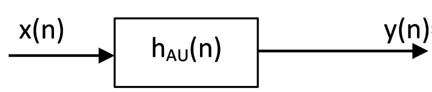
- **Ολοπερατά φίλτρα**

απόκριση συχνότητας 1 → $|H(e^{j\omega})|=1$



Αφήνει να περάσουν όλες οι συχνότητες από μέσα του, χωρίς να μεγαλώσει ή να μικρύνει καμία.

Το χρησιμοποιούμε για να αλλάξουμε τη θέση των πόλων και των μηδενιστών.



$y(n)=x(n)*h_{AU}(n) \longrightarrow Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})*H_{AU}(e^{j\omega})$

Το πλάτος θα είναι ίδιο αλλά θα έχει αλλάξει η φάση (η θέση των πόλων και των μηδενιστών).

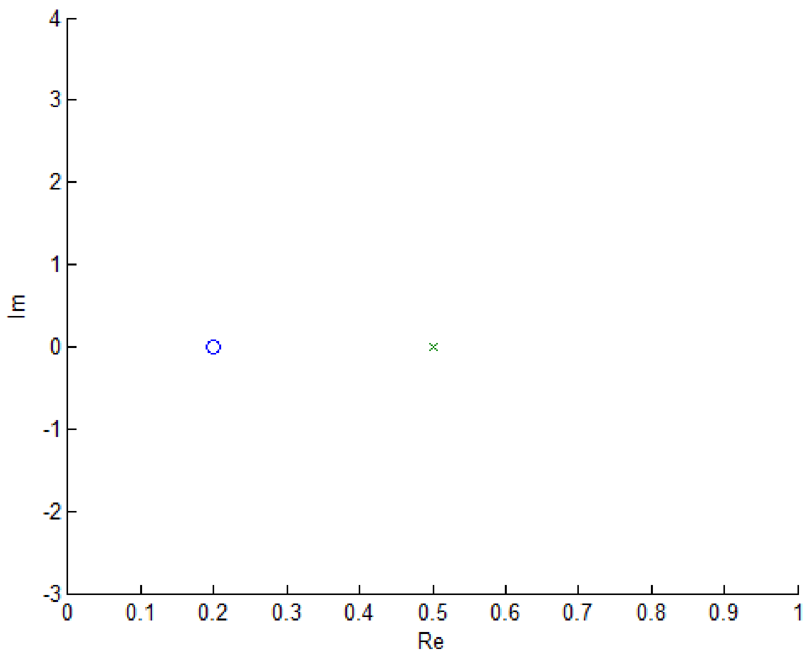
Άσκηση:

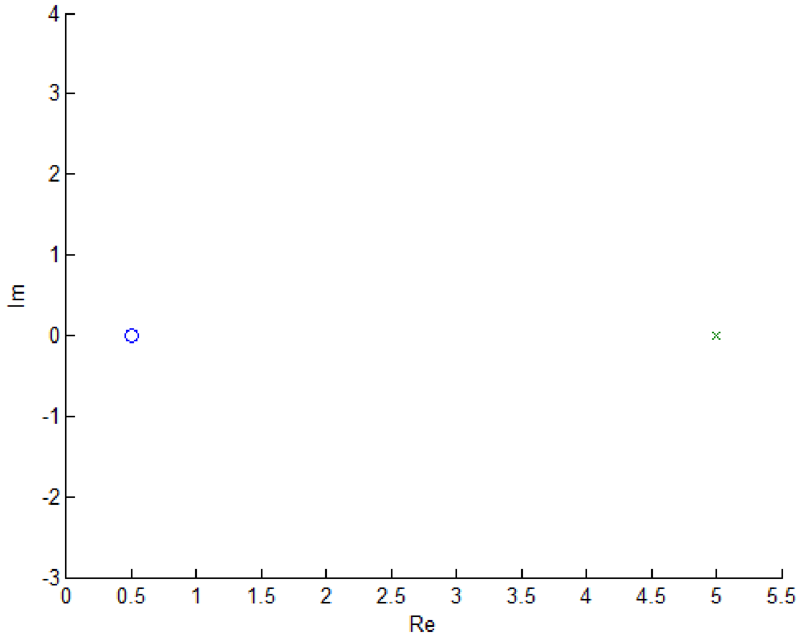
$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-0.2}{1-0.2z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1-0.2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \qquad \begin{cases} \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\alpha}: 1-0.2z^{-1}=0 \Rightarrow 1=0.2z^{-1} \Rightarrow z=0.2 \\ \pi\acute{o}\lambda o\iota: 1-0.5z^{-1}=0 \Rightarrow 1=0.5z^{-1} \Rightarrow z=0.5 \end{cases}$$

$$G(z)=H(z)\cdot H_{ap}(z)=\frac{1-0.2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}-0.2}{1-0.2z^{-1}}=\frac{z^{-1}-0.2}{1-0.5z^{-1}}$$

$$\begin{cases} \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\alpha}: z^{-1}=0.2=\frac{2}{10} \Rightarrow z=\frac{10}{2} \Rightarrow z=5 \\ \pi\acute{o}\lambda o\iota: z=0.5 \end{cases}$$





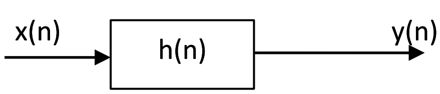
$$\left.\begin{aligned} |H(z)| &= \frac{|1-0.2z^{-1}|}{|1-0.5z^{-1}|} \\ |G(z)| &= \frac{|z^{-1}-0.2|}{|1-0.5z^{-1}|} \end{aligned}\right\} \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \acute{\iota}\delta\iota\alpha$$

Τα ολοπερατά φίλτρα δεν επηρρεάζουν το πλάτος του συστήματος αλλά τη φάση του.

Άσκηση:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2^n u(-n-1) \quad (1)$$

$$y(n) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n) \quad (2)$$



H(z)=? Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

$$y(n)=x(n)*h(n)\xrightarrow{z}Y(z)=X(\mathrm{z})\cdot \mathrm{H(z)}\Rightarrow \mathrm{H(z)}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

(1) $$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}\quad 1/2<|z|<2$$

(2) $$Y(z)=\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{6}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}=\frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\quad |z|>3/4$$

περιοχή σύγκλισης
της εξόδου

$$\Rightarrow H(z)=\frac{\dfrac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}}{\dfrac{\frac{3}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}}=\frac{\left(1-2z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$\Pi.\Sigma.:\begin{cases}|z|>3/4\\|z|<3/4\end{cases}$$

Διαλέγουμε την πάνω περιοχή σύγκλισης γιατί θα πρέπει να επικαλύπτεται με την περιοχή σύκλισης της εξόδου του συστήματος.

<u>Άσκηση</u>:

$$(1+k)-1.2z^{-1}=0\Rightarrow 1+k=\frac{1.2}{z}\Rightarrow z=\frac{1.2}{1+k}\rightarrow \pi\acute{o}\lambda o\varsigma$$

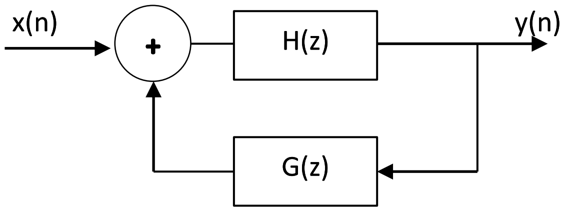
$$H(z)=\frac{1}{1-1.2z^{-1}}$$

$$G(z)=k$$

$$Q(z)=\frac{H(z)}{1+G(z)H(z)}=\frac{\dfrac{1}{1-1.2z^{-1}}}{1+k\dfrac{1}{1-1.2z^{-1}}}=\frac{1}{(1+k)-1.2z^{-1}}$$

$$\left|\frac{1.2}{1+k}\right|<1\Rightarrow 1.2<1+k\Rightarrow k>0.2$$

Αν βάλω k μεγαλύτερο του 0.2, τότε ο πόλος θα μπει εντός του μοναδιαίου κύκλου και το σύστημα θα γίνει ευσταθές!



<u>Άσκηση:</u>

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + 1.44z^{-2}}$$

$$G(z) = k$$

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{\frac{1}{1 - z^{-1} + 1.44z^{-2}}}{1 + k\frac{1}{1 - z^{-1} + 1.44z^{-2}}} = \frac{\frac{1}{1+k}}{1 + \frac{1}{1+k}z^{-1} + \frac{1.44}{1+k}z^{-2}}$$

$$|a(2)| < 1$$

$$|a(1)| < 1 + a(2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{1.44}{1+k}\right| < 1 \Rightarrow 1.44 < 1 + k \Rightarrow k > 0.44 \\ \left|\frac{1}{1+k}\right| < 1 + \frac{1.44}{1+k} \Rightarrow \frac{1}{1+k} < \frac{k + 2.44}{1+k} \end{array}\right\} \Rightarrow k > 0.44$$

<u>Άσκηση:</u>

$$H(z)=\frac{z^{-1}-b}{1-az^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}-b}{1-az^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y(z)\cdot(1-az^{-1})=(z^{-1}-b)\cdot X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)1-az^{-1}Y(z)=-bX(z)+z^{-1}X(z)$$

$$\Big\downarrow^{z^{-1}}$$

$$y(\mathrm{n})-ay(n-1)=-bx(n)+x(n-1)\Rightarrow$$

$$y(n)=ay(n-1)-bx(n)+x(n-1)$$

21ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση:

$$H(z)=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}} \qquad |a|<1$$

α) Γενική εξίσωση?

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}\Rightarrow Y(z)(1-az^{-1})=X(z)(z^{-1}-a^*)\Rightarrow$$

$$Y(z)-az^{-1}Y(z)=X(z)z^{-1}\overset{z^{-1}}{\Rightarrow} y(n)-ay(n-1)=x(n-1)-a^*x(n)\Rightarrow$$

$$y(n)=ay(n-1)-a^*x(n)+x(n-1)$$

β) Να εξεταστεί αν το σύστημα είναι ένα ολοπερατό φίλτρο? (πλάτος συχνότητας=1)

$$|H(e^{j\omega})|=1 \qquad |H(e^{j\omega})|=H(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-e^{-j\omega}}$$

$$z=re^{j\omega} \qquad |z|=z\cdot z^*=(a+jb)(a-jb)$$

$$r=1\rightarrow \mu o\nu\alpha\delta\iota\alpha\acute{\iota}o\varsigma\ \kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\varsigma$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ z=e^{j\omega}$$

$$|H(e^{j\omega})|=H(e^{j\omega})\cdot H^*(e^{j\omega})=\frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}}\cdot\left(\frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}}\right)^*=\frac{e^{-j\omega}-a^*}{1-ae^{-j\omega}}\cdot\frac{e^{j\omega}-a}{1-ae^{j\omega}}\Rightarrow\ldots\Rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{1+|a|^2-2\operatorname{Re}\left\{a^*\ldots e^{j\omega}\right\}}{1+|a|^2-2\operatorname{Re}\left\{a^*\ldots e^{j\omega}\right\}}=1$$

άρα το σύστημα είναι ένα ολοπερατό φίλτρο.

γ)

$$H(z)G(z)=1 \Rightarrow G(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{1}{\dfrac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}}=$$

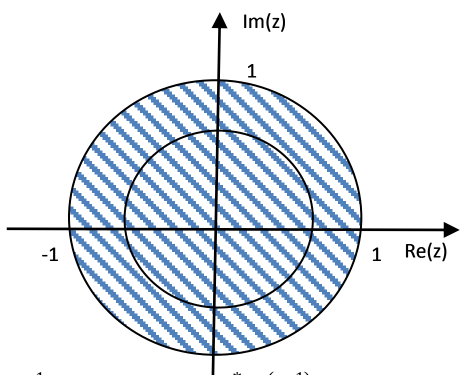
$$=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a^*}=-\frac{1}{a}\cdot\frac{1-az^{-1}}{1-(a^*z)^{-1}}$$

Μηδενικό: z=a

Πόλος:

$$z=\frac{1}{a^*} \qquad \left|\frac{1}{a^*}\right|>1$$

$$\Pi.\Sigma.\ |z|<\left|\frac{1}{a^*}\right|$$



Π.Σ. $|z|<|1/a^*|$

$$g(n)=(a^*)^{-n-1}u(-n-1)-a(a^*)^{-(n-1)}u(-n)$$

<u>Άσκηση:</u>

$$h(n)=2^n u(n)-0.25\cdot 2^{n-1}u(n-1)$$

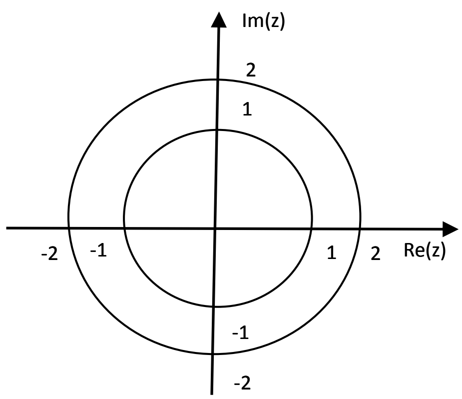
$$x(n-n_0)\overset{z}{\leftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$$

α) Συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}-0.25\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}==\frac{1-0.25z^{-1}}{1-2z^{-1}}=\frac{A(z)}{B(z)}$$

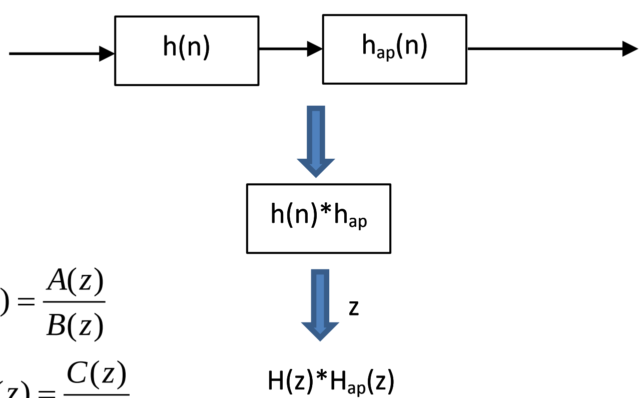
$$\begin{cases} \text{Μηδενικά}: 1-0.25z^{-1}=0 \Rightarrow 1=0.25z^{-1} \Rightarrow 1=\frac{1}{4}z^{-1} \Rightarrow 4=z^{-1} \Rightarrow z=1/4 \\ \text{Πόλοι}: 1-2z^{-1}=0 \Rightarrow 1=2z^{-1} \Rightarrow 1=\frac{2}{z} \Rightarrow z=2 \end{cases}$$

$\Pi.\Sigma. |z|>2$



αιτιατό, μη ευσταθές

β) G(z) σε σειρά ώστε να μην πειραχτεί η κρουστική αλλά να γίνει ευσταθές



$$H(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$$

$$H_{ap}(z)=\frac{C(z)}{D(z)}$$

$$G(z)=H(z)\cdot H_{ap}(z)=\frac{A(z)}{B(z)}\cdot\frac{C(z)}{D(z)}$$

Φτιάχνω ολοπερατό φίλτρο για να απαλείψω τον πόλο z=2

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}\overset{\times(-2)}{=}\frac{-2z^{-1}+2a^*}{-2+2az^{-1}}\Rightarrow\frac{C(z)}{D(z)}$$

$$+2a^*=1\Rightarrow a^*=1/2\Rightarrow a=1/2$$

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-1/2}{1-1/2z^{-1}}=\frac{-2z^{-1}+1}{-2+z^{-1}}$$

$$H(z)\cdot H_{ap}(z)=\frac{1-0.25z^{-1}}{1-2z^{-1}}\cdot\frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}-2}=\frac{1-0.25z^{-1}}{z^{-1}-2}\begin{cases}\text{Μηδενικά}: z=1/4\\ \text{Πόλοι}: z^{-1}-2=0\Rightarrow z^{-1}=2\Rightarrow z=1/2\end{cases}$$

$$\Pi.\Sigma.: |z|>1/2$$

ΟΛΟΠΕΡΑΤΑ ΦΙΛΤΡΑ

- Μεταφορά Μηδενικού:

  $a_0\to 1/a_0$

  $A(z)=D(z)\to G(z)=\frac{A(z)}{B(z)}\cdot\frac{C(z)}{D(z)}=\frac{C(z)}{B(z)}$

- Μεταφορά Πόλου:

  $b_0\to 1/b_0$

  $B(z)=C(z)\to G(z)=\frac{A(z)}{B(z)}\cdot\frac{C(z)}{D(z)}=\frac{A(z)}{D(z)}$

Απαλείφω πόλο

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}=\frac{-2(z^{-1}-a^*)}{-2(1-az^{-1})}=\frac{-2z^{-1}+2a^*}{-2+2az^{-1}}=\frac{C(z)}{D(z)}$$

$$B(z)=C(z)\Rightarrow 1-2z^{-1}=-2z^{-1}+2a^*\Rightarrow 1=2a^*\Rightarrow a^*=1/2\Rightarrow \mathrm{a}=1/2$$

Απαλείφω το μηδενικό z=1/4

$$H_{ap}(z)=\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}=\frac{C(z)}{D(z)}$$

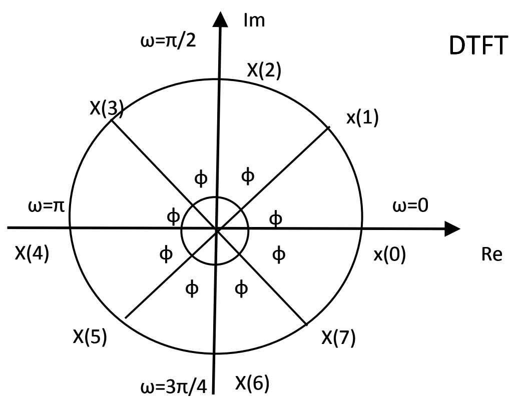
$$A(z)=D(z)\Rightarrow 1-0.25z^{-1}=1-az^{-1}\Rightarrow a-0.25=1/4\Rightarrow a^*=1/4$$

$$G(z)=H(z)H_{ap}(z)=\frac{1-0.25z^{-1}}{1-2z^{-1}}\cdot\frac{0.25z^{-1}}{1-0.25z^{-1}}=\frac{z^{-1}-0.25}{1-2z^{-1}}$$

$$\nu\acute{\varepsilon}o\ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{o}: z^{-1}=0.25\Rightarrow z=4$$

22° ΜΑΘΗΜΑ

<u>Μετασχηματισμός DFT Fourier</u>



DTFT

DFT =N =0

X(0)

X(15)

$$x_1(n)=\delta(n)$$

DFT N-σημείων

$$x(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=$$

$$=\delta(0)e^{-j\frac{2\pi 0k}{N}}+\delta(1)e^{-j\frac{2\pi 1k}{N}}+\delta(2)e^{-j\frac{2\pi 2k}{N}}+\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k)=1e^{-j0}=1e^{0}=1\cdot 1=1 \qquad 0\le k\le N-1$$

Άσκηση:

$$x_2(n) = \delta(n - n_0)$$

$$x_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} =$$

$$= \delta(0 - n_0) e^{-j\frac{2\pi 0k}{N}} + \delta(1 - n_0) e^{-j\frac{2\pi 1k}{N}} + \ldots + \delta((n_0 - 1) - n_0) e^{-j\frac{2\pi (n_0 - 1)k}{N}} + \delta(n_0 - n_0) e^{-j\frac{2\pi n_0 k}{N}} +$$

$$+ \delta((n_0 + 1) - n_0) e^{-j\frac{2\pi (n_0 + 1)k}{N}} + \ldots + \delta((\mathrm{N} - 1) - n_0) e^{-j\frac{2\pi (N-1)k}{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(k) = \delta(n_0 - n_0) e^{-j\frac{2\pi n_0 k}{N}} = \delta(0) e^{-j\frac{2\pi n_0 k}{N}} = 1e^{-j\frac{2\pi n_0 k}{N}} = e^{-j\frac{2\pi n_0 k}{N}} \qquad 0 \le k \le N - 1$$

Άσκηση:

$$x_2(n) = \delta(n - 2)$$

$$\mathrm{DFT}\, 5 - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu \rightarrow N = 5$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{4} \delta(n - 2) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \delta(0 - 2) e^{-j\frac{2\pi 0k}{5}} + \delta(1 - 2) e^{-j\frac{2\pi 1k}{5}} + \ldots + \delta(2 - 2) e^{-j\frac{2\pi 2k}{5}} + \delta(3 - 2) e^{-j\frac{2\pi 3k}{5}} + \delta(4 - 2) e^{-j\frac{2\pi 4k}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \delta(-2) e^{0} + \delta(-1) e^{-j\frac{2\pi k}{5}} + \delta(0) e^{-j\frac{4\pi k}{5}} + \delta(1) e^{-j\frac{6\pi k}{5}} + \delta(2) e^{-j\frac{8\pi k}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \delta(0) e^{-j\frac{4\pi k}{N}} = 1e^{-j\frac{4\pi k}{5}} = e^{-j\frac{4\pi k}{5}} \qquad 0 \le k \le 4$$

$$\delta(0) = 1 \rightarrow \pi\acute{\alpha}\nu\tau\alpha$$

Άσκηση:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-5)$$

$$\text{DFT}\,10 - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{9} (\delta(n) + 2\delta(n-5)) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{9} \delta(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} + 2\sum_{n=0}^{9} \delta(n-5) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \delta(0) e^{-j\frac{2\pi 0k}{5}} + 2\delta(5-5) e^{-j\frac{2\pi 5k}{10}} = 1e^{0} + 2\cdot 1e^{-j\frac{10\pi k}{10}} = 1 + 2e^{-j\pi k} \qquad 0 \le k \le 9$$

Άσκηση:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

$$\text{DFT}\,4 - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{3} (\delta(n) + 2\delta(n-5) + \delta(n-3)) e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{3} \delta(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} + 2\sum_{n=0}^{3} \delta(n-2) e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} + \sum_{n=0}^{3} \delta(n-3) e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \delta(0) e^{0} + 2\delta(2-2) e^{-j\frac{2\pi 2k}{4}} + \delta(3-3) e^{-j\frac{2\pi 3k}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = 1 + 2\cdot 1e^{-j\frac{4\pi k}{4}} + 1e^{-j\frac{6\pi k}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = 1 + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3\pi k}{2}} \qquad 0 \le k \le 3$$

Άσκηση:

$$x(n) = a^{n} \qquad 0 \le \pi \le N$$

$$\text{DFT}\,N - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} a^{n} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(ae^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right)^{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \frac{1 - \left(ae^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right)^{N}}{1 - \left(ae^{-j\frac{2\pi k}{N}} \right)} \qquad 0 \le k \le N-1$$

<u>Άσκηση:</u>

$$x(n) = u(n) - u(n-n_0)$$

$$\text{DFT N} - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu \qquad 0 \le n_0 < N$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} (u(n) - u(n-n_0)) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} - \sum_{n=0}^{N-1} u(n-n_0) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} - \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} u(n-n_0) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} + \sum_{n=n_0}^{N-1} u(n-n_0) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} - \sum_{n=n_0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} + \sum_{n=n_0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} - \sum_{n=n_0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{n_0-1} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1 - \left(e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \right)^N}{1 - e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}} \qquad 0 \le k \le N-1$$

23$^{\text{ο}}$ ΜΑΘΗΜΑ

z

X(z) → H(z) →

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Διακριτός
Χρόνος n

x(n) → h(n) →

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

DTFT
ω

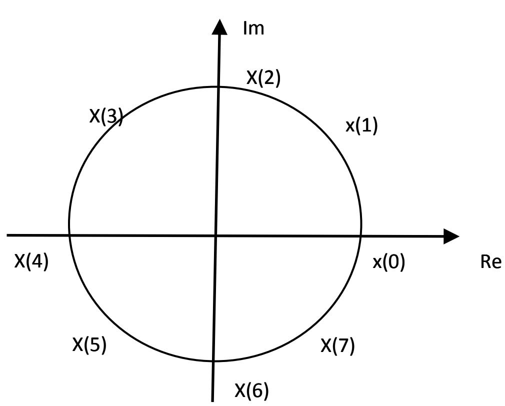
X(e$^{j\omega}$) → H(e$^{j\omega}$) →

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

DFT
matlab fft

X(k) → H(k) →

$$Y(k) = X(k) \cdot H(k) \Rightarrow H(k) = \frac{Y(k)}{X(k)}$$



Άσκηση:

$$x(n) = 3\delta(n) - 7\delta(n-1) + 4\delta(n-2) - 5\delta(n-8)$$

$$\text{DFT}\,10 - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{9} (3\delta(n) - 7\delta(n-1) + 4\delta(n-2) - 5\delta(n-8))e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{9} 3\delta(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} - \sum_{n=0}^{9} 7\delta(n-1)e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} + \sum_{n=0}^{9} 4\delta(n-2)e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} - \sum_{n=0}^{9} 5\delta(n-8)e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = 3\delta(0)e^{0} - 7\delta(1-1)e^{-j\frac{2\pi 1k}{10}} + 4\delta(2-2)e^{-j\frac{2\pi 2k}{10}} - 5\delta(n-8)e^{-j\frac{2\pi 8k}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = 3\cdot 1\cdot 1 - 7\cdot 1e^{-j\frac{2\pi k}{10}} + 4e^{-j\frac{4\pi k}{10}} - 5e^{-j\frac{16\pi k}{10}} \qquad 0 \le k \le 10$$

Άσκηση:

$$x(n) = 3\delta(n) - 7\delta(n-1)$$

$$\text{DFT}\,4 - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu \rightarrow \text{N} = 4$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{3} (3\delta(n) - 7\delta(n-1))e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = 3\sum_{n=0}^{3} \delta(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} - 7\sum_{n=0}^{9} \delta(n-1)e^{-j\frac{2\pi nk}{4}}$$

$$\sum_{n=0}^{3} \delta(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} = \delta(0)e^{-j\frac{2\pi 0k}{4}} + \delta(1)e^{-j\frac{2\pi 1k}{4}} + \delta(2)e^{-j\frac{2\pi 2k}{4}} + \delta(3)e^{-j\frac{2\pi 3k}{4}}$$

$$\sum_{n=0}^{9} \delta(n-1)e^{-j\frac{2\pi nk}{4}} = \delta(0-1)e^{-j\frac{2\pi 0k}{4}} + \delta(1-1)e^{-j\frac{2\pi 1k}{4}} + \delta(2-1)e^{-j\frac{2\pi 2k}{4}} + \delta(3-1)e^{-j\frac{2\pi 3k}{4}}$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad x(k) = 3e^{0} - 7e^{-j\frac{2\pi k}{4}} = 3 - 7e^{-j\frac{\pi k}{2}} \qquad 0 \le k \le 4$$

Άσκηση:

$$x(n) = u(n) - u(n-4)$$

$\mathrm{DFT}10 - \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{9} (u(n) - u(n-4)) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{9} u(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} - \sum_{n=0}^{9} u(n-4) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{9} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} - \left(\sum_{n=0}^{3} u(n-4) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} + \sum_{n=4}^{9} u(n-4) e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \right) \Rightarrow$$

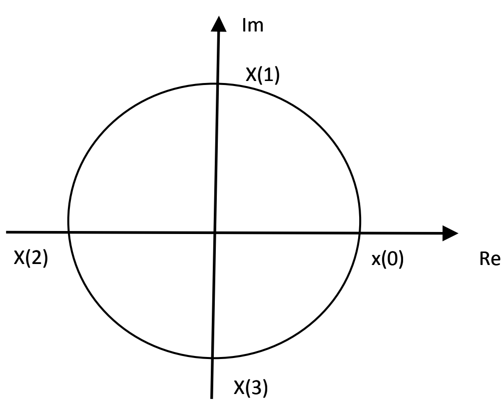
$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{9} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} - \sum_{n=n_0}^{9} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} + \sum_{n=4}^{9} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} - \sum_{n=4}^{9} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k) = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \Rightarrow x(k) = \frac{1 - \left(e^{-j\frac{2\pi nk}{10}} \right)^4}{1 - e^{-j\frac{2\pi nk}{10}}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} A^n = \frac{1 - A^n}{1 - A}}$$

Άσκηση:

$$X(z) = \frac{z + 2z^{-1}}{1 - z^{-2}}$$



DFT

$$x(0) = X(z)|_{z=1} = \frac{1+2(1)^{-1}}{1-(1)^{-2}} = \dots$$

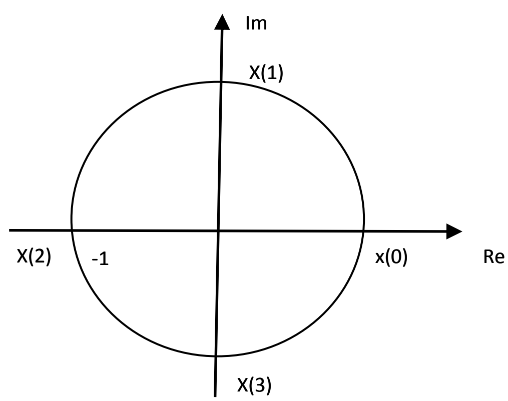
$$x(1) = X(z)|_{z=e^{j\pi/2}} = \frac{1+2(e^{j\pi/2})^{-1}}{1-(e^{j\pi/2})^{-2}} = \dots$$

$$x(2) = X(z)|_{z=e^{j\pi}} = \frac{1+2(e^{j\pi})^{-1}}{1-(e^{j\pi})^{-2}} = \dots$$

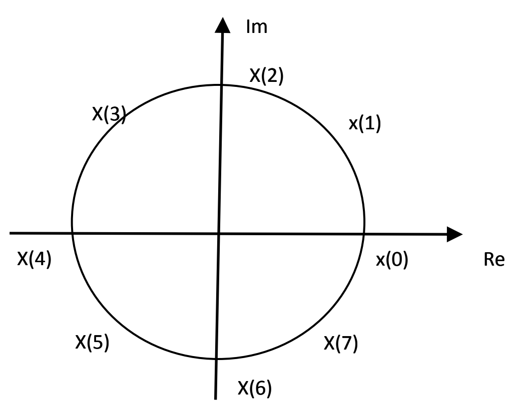
$$x(3) = X(z)|_{z=e^{3j\pi/2}} = \frac{1+2(e^{3j\pi/2})^{-1}}{1-(e^{3j\pi/2})^{-2}} = \dots$$

Να υπολογιστεί για DFT 4 σημείων τον τρίτο συντελεστή

$$x(2) = X(z)|_{z=e^{j\pi}=-1}$$

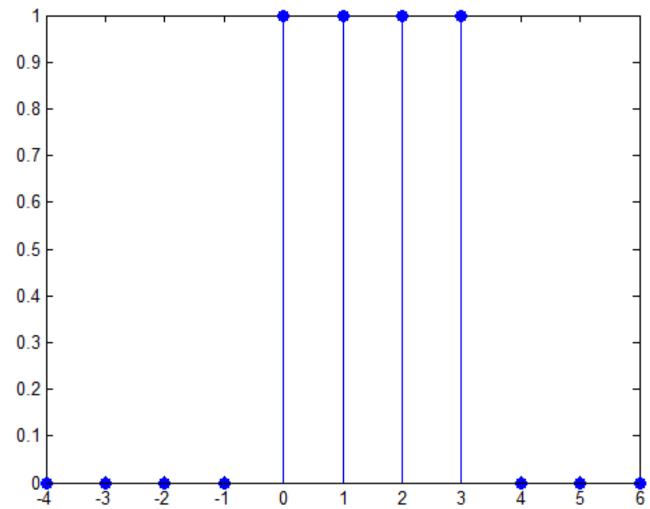


8 σημείων x(2) x(4)?

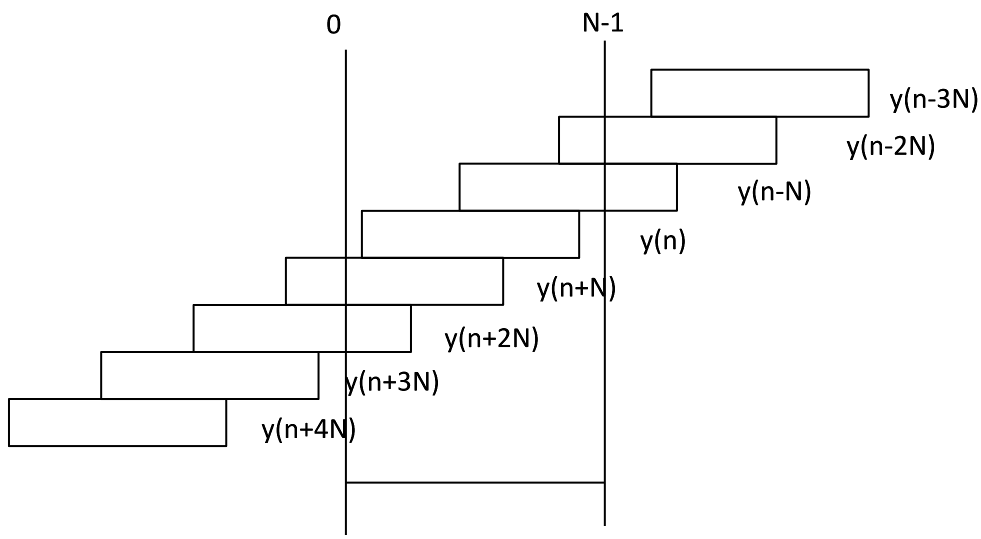


$$x(2) = X(z)|_{z=e^{j\pi/2}} = \ldots$$
$$x(4) = X(z)|_{z=e^{j\pi}} = \ldots$$

- **<u>Κυκλική Μετατόπιση</u>**

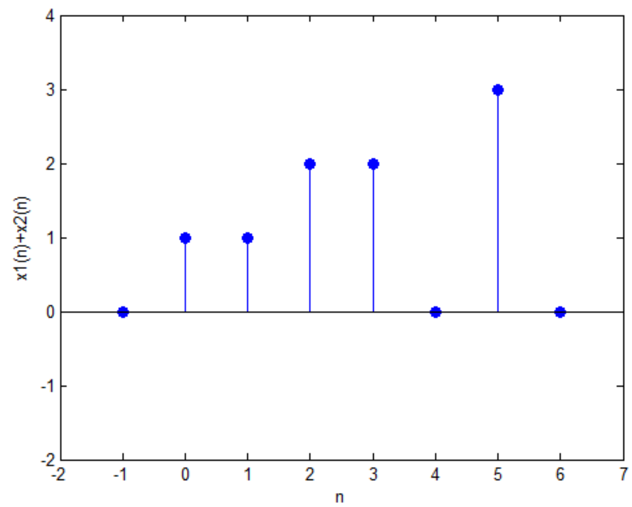


Η κυκλική μετατόπιση έχει νόημα μόνο για N-1 μετατοπίσεις.



<u>Άσκηση:</u>

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-5)$$
$$x_1(n)\ (4)\ x_2(n)$$



	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	
y(n-8)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
y(n-4)	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	03
y(n)	0	0	0	1	1	2	2	0	3	0	0	
y(n+4)	1	2	2	0	3	0	0	0	0	0	0	
y(n+8)	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
			+	1	4	2	2					

άρα

$$x_1(n)\ (4)\ x_2(n) = \delta(n) + 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3)$$

<u>Άσκηση:</u>

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 3\delta(n-5)$$

$$x_1(n)\ (2)\ x_2(n)$$

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y(n-2)												
y(n)	0	0	0	0	1	1	2	2	0	3	0	0
y(n+2)	0	0	1	1	2	2	0	3	0	0	0	0
y(n+4)	1	1	2	2	0	3	0	0	0	0	0	0
				+	3	6						

άρα

$$x_1(n)\ (2)\ x_2(n) = 3\delta(n) + 6\delta(n-1)$$

24ο ΜΑΘΗΜΑ

- **Υλοποίηση Συστημάτων Διακριτού Χρόνου**

1) FIR (πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης)

   πεπερασμένου μήκους, π.χ. y=2x(n)-5x(n-3) με q=3 (*)

2) IIR (άπειρης κρουστικής απόκρισης)

   π.χ. u(n) → π.χ. y(n)=2x(n)-3x(n-2)+y(n-2) (**)

Ανάλογα με το μήκος του συστήματος χωρίζονται.

ΓΕΔΣΣ

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

Αν υπάρχει έστω και μια μη μηδενική τιμή στο α, τότε το σύστημα είναι IIR, ενώ αν δεν υπάρχει είναι FIR.

$$(*)\ \ y(n) = \sum_{k=0}^{3} b(k)x(n-k) \qquad q=3$$

με b(0)=2

b(1)=b(2)=0

b(3)=-5

$$(**)\ \ y(n) = 2x(n) + 0x(n-1) - 3x(n-2) + 0y(n-1) + 1\,\mathrm{y}(\mathrm{n}-2) =$$

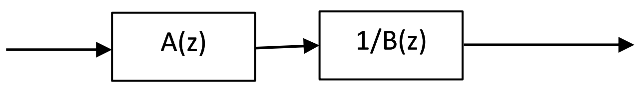
$$= \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} \mathrm{a}(k)\,\mathrm{y}(n-k)$$

με b(0)=2 a(1)=0

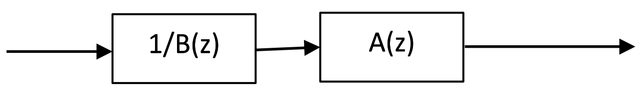
b(1)= 0 a(2)=-1

b(2)=-3

$$H(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\underbrace{(A(z))\left(\frac{1}{B(z)}\right)}_{\text{ΜΟΡΦΗ I}}=\underbrace{\left(\frac{1}{B(z)}\right)A(z)}_{\substack{\text{ΜΟΡΦΗ II}\\ \text{Διάταξη}\\ \text{Καταράκτη}}}$$



ΜΟΡΦΗ I

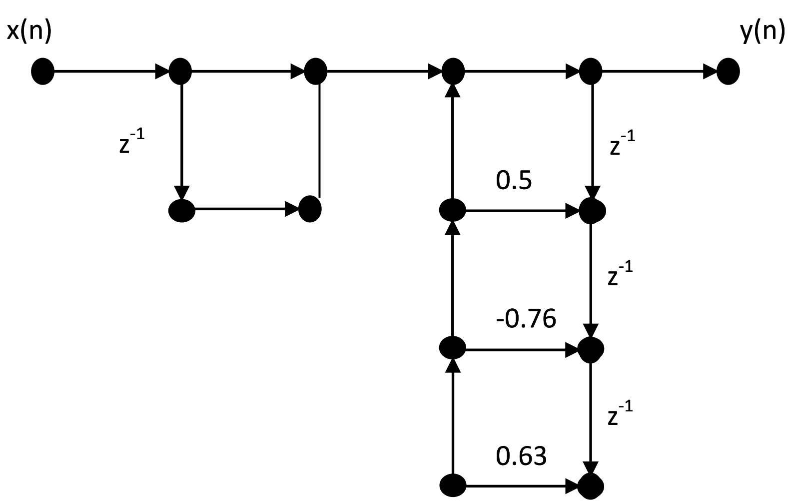


ΜΟΡΦΗ II (γλιτώνω καθυστερητές)

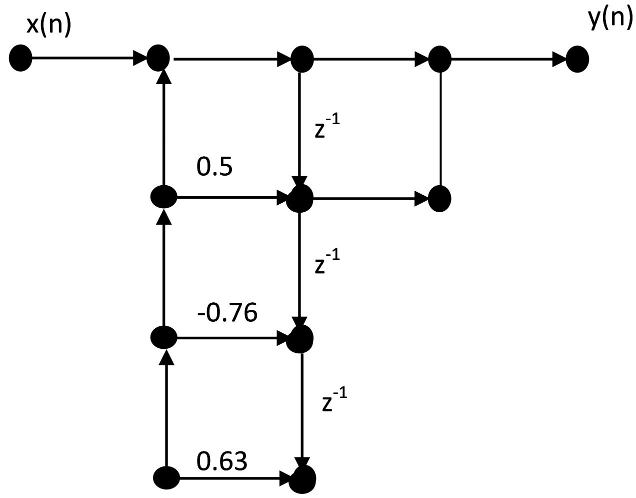
<u>Άσκηση:</u>

$$H(z)=\frac{1+0.875z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.76z^{-2}-0.63z^{-3}}$$

ΜΟΡΦΗ I



ΜΟΡΦΗ ΙΙ



Η ΜΟΡΦΗ ΙΙ υπερτερεί της ΜΟΡΦΗΣ Ι γιατί γλιτώνουμε έναν καθυστερητή.

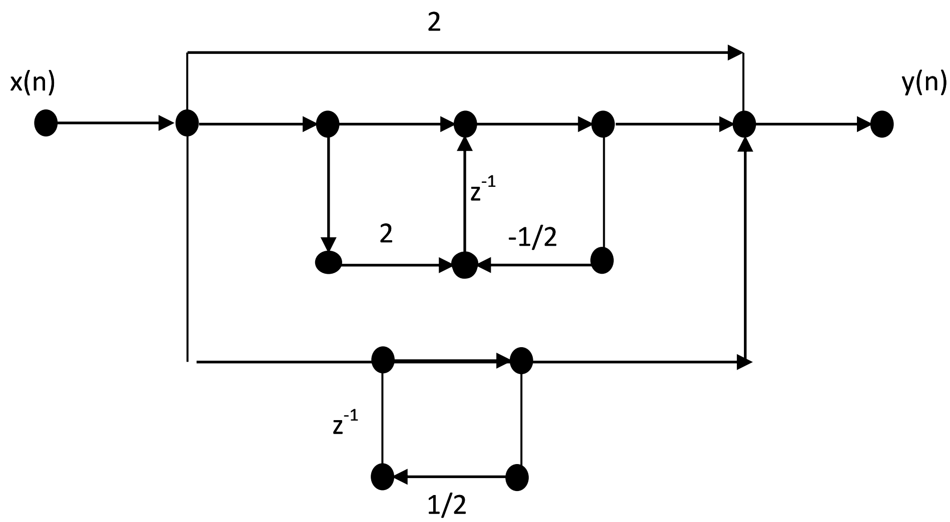
<u>Άσκηση:</u>

$$H(z)=\frac{1+0.875z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.76z^{-2}-0.63z^{-3}} \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+0.875z^{-1}}{1-0.5z^{-1}+0.76z^{-2}-0.63z^{-3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y(z)(1-0.5z^{-1}+0.76z^{-2}-0.63z^{-3})=X(z)(1+0.875z^{-1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y(z)-0.5z^{-1}Y(z)+0.76z^{-2}Y(z)-0.63z^{-3}Y(z)=X(z)+0.875z^{-1}X(z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y(z)=X(z)+0.875z^{-1}X(z)+0.5z^{-1}Y(z)-0.76z^{-2}Y(z)+0.63z^{-3}Y(z) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(n)=x(n)+0.875x(n-1)+0.5y(n-1)-0.76y(n-2)+0.63\,\mathrm{y(n-3)}$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{q=1}b(k)x(n-k)-\sum_{k=1}^{p=3}a(k)y(n-k)$$

$$b(0)=1 \qquad a(1)=-0.5$$
$$b(1)=0.875 \qquad a(2)=0.76$$
$$a(3)=-0.63$$

(παράλληλη σύνδεση)



$$H(z) = 2 + \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 1/2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 1/2z^{-1}}$$